COMPTES RENDUS

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 10 AVRIL 1882.

PRÉSIDENCE DE M. É. BLANCHARD.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le **Ministre de l'Instruction publique et des Beaux-Arts** adresse l'ampliation du Décret par lequel le Président de la République approuve l'élection de M. *P. Bert* pour remplir, dans la Section de Médecine et Chirurgie, la place laissée vacante par le décès de M. Bouillaud.

Il est donné lecture de ce Décret.

Sur l'invitation de M. le Président, M. P. Bert prend place parmi ses confrères.

ASTRONOMIE. — *Sur les déplacements séculaires des plans des orbites de trois planètes;* par M. F. Tisserand.

« Dans une Note insérée dans les *Comptes rendus*, t. XCIII, p. 525, je me suis occupé d'une question intéressante traitée par Lagrange, concernant les déplacements séculaires des orbites de trois planètes; je me propose d'indiquer aujourd'hui un cas particulier qui se présente de lui-même et qui conduit à une question curieuse examinée par Le Verrier :

« Il existe entre Jupiter et le Soleil une position telle que, si l'on y plaçait une petite

masse dans une orbite d'abord peu inclinée à celle de Jupiter, cette petite masse pourrait sortir de son orbite primitive et atteindre de grandes inclinaisons sur le plan de l'orbite de Jupiter, par l'action de cette planète et de Saturne. Il est remarquable que cette position se trouve à très peu près à une distance double de la distance de la Terre au Soleil, c'est-à-dire, à la limite inférieure de la zone où l'on a rencontré jusqu'ici les petites planètes.... » (*Annales de l'Observatoire*, t. II, p. 165.)

» Soient

x le cosinus de l'inclinaison mutuelle des orbites de m' et m'';
x' » » m'' et m;
x'' » » m et m';
a, a', a'' les demi-grands axes des trois orbites;
m, m', m'' les masses des trois planètes;

les quantités x, x', x'' sont déterminées par les équations suivantes (voir la Note citée plus haut) :

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\,\mathrm{A}\mathrm{U}, \\[2mm] \dfrac{dx'}{dt} = -\,\mathrm{A}'\mathrm{U}, \\[2mm] \dfrac{dx''}{dt} = -\,\mathrm{A}''\mathrm{U}, \end{cases}$$

où

$$\mathrm{U} = \sqrt{1 - x^2 - x'^2 - x''^2 + 2xx'x''},$$

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathrm{A} = \dfrac{m}{\sqrt{a'a''}}\left(\sqrt{a''}\Phi'_{0,1} - \sqrt{a'}\Phi'_{0,2}\right), \\[2mm] \mathrm{A}' = \dfrac{m'}{\sqrt{a''a}}\left(\sqrt{a}\Phi'_{1,2} - \sqrt{a''}\Phi'_{0,1}\right), \\[2mm] \mathrm{A}'' = \dfrac{m''}{\sqrt{aa'}}\left(\sqrt{a'}\Phi'_{0,2} - \sqrt{a}\Phi'_{1,2}\right). \end{cases}$$

Au degré d'approximation auquel s'est arrêté Lagrange, les quantités Φ' sont des constantes, fonctions de a, a', a''; $\mathrm{A}, \mathrm{A}', \mathrm{A}''$ sont donc aussi des constantes.

» Le cas particulier que je veux considérer est celui où l'on a la relation

$$\mathrm{A}' = \mathrm{A}'';$$

cette équation peut s'écrire :

$$(3)\qquad \sqrt{a}\left[m'a'\mathrm{B}^{(1)}_{\frac{3}{2}}(a, a') + m''a''\mathrm{B}^{(1)}_{\frac{3}{2}}(a, a'')\right] = a'a''\left(\frac{m'}{\sqrt{a''}} + \frac{m''}{\sqrt{a'}}\right)\mathrm{B}^{(1)}_{\frac{3}{2}}(a', a''),$$

en désignant par B les transcendantes bien connues qui se présentent dans le développement de l'inverse de la distance de deux planètes.

» Sous cette forme, on reconnaît facilement l'équation suivante :

$$(0,1) + (0,2) = (1,2) + (2,1)$$

considérée par Le Verrier (*Annales de l'Observatoire*, t. II, addition au Chapitre IX).

» Dans ce cas, les équations (1) donnent

$$x'' - x' = \text{const.}:$$

ainsi, la différence des cosinus des inclinaisons de l'orbite de m sur celle de m' et m'' est constante.

» J'ai prouvé, par l'intégration des équations (1), que, m', m'', a' et a'' étant supposés connus, si l'on détermine a par l'équation (3), en diminuant suffisamment la masse m, il arrivera que les inclinaisons de l'orbite de la planète m sur les orbites de m' et m'' pourront grandir considérablement; je vais examiner avec plus de détail le cas limite où m tend vers zéro.

» Les planètes m' et m'' seront supposées être Jupiter et Saturne, et la planète m un astéroïde dont nous regarderons la masse comme nulle vis-à-vis de m' et m''.

» La résolution de l'équation (3) donne

$$a_0 = 1,98021.$$

» Je me suis proposé la question suivante :

» Les formules de la première approximation montrent que les inclinaisons de l'orbite de m sur celles de m' et m'' *peuvent* grandir considérablement. Trouver si elles croissent réellement ainsi, et jusqu'à quelle limite elles peuvent atteindre.

» Mais, pour élucider ce point, les formules de la première approximation sont insuffisantes; j'ai cherché à faire une approximation de plus, et même à tenir compte d'un seul coup de tous les termes qui contiennent les inclinaisons; seulement, je n'ai pas pu suivre jusqu'au bout la voie analytique, et, à un moment donné, je suis obligé de recourir, dans chaque cas particulier, à des calculs numériques.

» En supposant, dans les équations (1), $m = 0$, on voit qu'il en résulte

$$x = \text{const.} = x_0;$$

on a ensuite, sans supposer, comme Lagrange, que les quantités Φ soient constantes,

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{dx'}{dt} = -\dfrac{m'}{\sqrt{aa''}}\mathrm{U}\left[\sqrt{a}\,\Phi'_{1,2}(x_0) - \sqrt{a''}\,\Phi'_{0,1}(x'')\right], \\ \dfrac{dx''}{dt} = -\dfrac{m''}{\sqrt{aa'}}\mathrm{U}\left[\sqrt{a'}\,\Phi'_{0,2}(x') - \sqrt{a}\,\Phi'_{1,2}(x_0)\right], \\ \mathrm{U} = \sqrt{1 - x_0^2 - x'^2 - x''^2 + 2x_0x'x''}. \end{cases}$$

» Les quantités Φ' sont les dérivées, prises par rapport à x', ou x'', ou x_0, de fonctions Φ dont voici l'expression :

$$(5)\quad \begin{cases} \Phi_{0,1}(x'') = \frac{1}{2}\mathrm{B}^{(0)}_{\frac{1}{2}}(a,a') - \frac{1}{2}aa'\mathrm{B}^{(1)}_{\frac{3}{2}}(a,a')\dfrac{1-x''}{2} \\ \qquad + \dfrac{3}{8}a^2a'^2\left[2\mathrm{B}^{(0)}_{\frac{5}{2}}(a,a') + \mathrm{B}^{(2)}_{\frac{5}{2}}(a,a')\right]\left(\dfrac{1-x''}{2}\right)^2 \\ \qquad + \dfrac{5}{16}a^3a'^3\left[9\mathrm{B}^{(1)}_{\frac{7}{2}}(a,a') + \mathrm{B}^{(3)}_{\frac{7}{2}}(a,a')\right]\left(\dfrac{1-x''}{2}\right)^3 \\ \qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Je n'écris pas les expressions semblables de $\Phi_{0,2}(x')$ et $\Phi_{1,2}(x_0)$.

» Cela posé, on déduit des équations (4), en éliminant dt,

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a'a''}}\Phi'_{1,2}(x_0)\left(m'\sqrt{a'}\,dx'' + m''\sqrt{a''}\,dx'\right) = m'\Phi'_{0,1}(x'')dx'' + m''\Phi'_{0,2}(x')dx'.$$

Or, on peut intégrer, ce qui donne

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a'a''}}\Phi'_{1,2}(x_0)\left(m'\sqrt{a'}\,x'' + m''\sqrt{a''}\,x'\right) \\ \qquad = m'\Phi_{0,1}(x'') + m''\Phi_{0,2}(x') + \text{const.}; \end{cases}$$

c'est là une intégrale du problème, et nous l'avons obtenue sans rien négliger dans les fonctions Φ.

» En désignant par M des constantes dont on formera aisément les expressions, l'intégrale (6) peut s'écrire

$$(7)\quad \begin{cases} \mathrm{M}''_1\dfrac{1-x''}{2} - \mathrm{M}''_2\left(\dfrac{1-x''}{2}\right)^2 + \mathrm{M}''_3\left(\dfrac{1-x''}{2}\right)^3 - \ldots \\ + \mathrm{M}'_1\dfrac{1-x'}{2} - \mathrm{M}'_2\left(\dfrac{1-x'}{2}\right)^2 + \mathrm{M}'_2\left(\dfrac{1-x'}{2}\right)^2 - \ldots = \mathrm{C}. \end{cases}$$

Telle est la relation rigoureuse qui lie x' et x'' ; il faudrait maintenant, pour achever la solution, en tirer x'' en fonction de x', et, en portant cette va-

leur dans la première équation (4), on aurait

$$dt = \varphi(x')dx';$$

on se trouverait ainsi ramené à une quadrature.

» Mais nous ne pouvons pas faire ce calcul analytique, et, du reste, ce qui nous intéresse dans la question actuelle n'est pas tant d'avoir les expressions de x' et x'' en fonction du temps que de savoir entre quelles limites x' et x'' peuvent varier.

» Pour trouver ces limites, nous remarquons qu'on doit avoir constamment

$$U^2 = 1 - x_0^2 - x'^2 - x''^2 + 2x_0x'x'' > 0,$$

d'où

$$x'^2 + x''^2 - 2x_0x'x'' < 1 - x_0^2. \tag{8}$$

Nous sommes donc ramené à trouver tous les systèmes de valeurs de x' et x'', vérifiant l'équation (7) et satisfaisant à l'inégalité (8).

» Il nous sera commode d'avoir recours à des considérations géométriques. Considérons la courbe (E) ayant pour équation

$$x'^2 + x''^2 - 2x_0x'x'' = 1 - x_0^2, \tag{9}$$

x'' désignant une abscisse et x' une ordonnée; cette courbe est une ellipse; l'équation (7) représentera de même une courbe (C), et nous aurons à déterminer sur cette courbe (C), en partant de la position initiale $M_0(x'_0, x''_0)$, tous les points qui sont intérieurs à l'ellipse (E); il faudra chercher l'intersection des deux courbes.

» Il convient de remarquer que l'ellipse a pour centre l'origine des coordonnées, et pour axes les bissectrices des angles des axes; x_0 diffère très peu de 1 (c'est le cosinus de l'inclinaison mutuelle des orbites de Jupiter et de Saturne, laquelle est de $1°15'14''$); le petit axe de cette ellipse n'est guère que la centième partie du grand, de sorte que l'ellipse se confond presque avec son grand axe.

» Quand on se borne à la première approximation, l'équation (7) devient

$$M''_1\frac{1-x''}{2} + M'_1\frac{1-x'}{2} = C;$$

la courbe (C) devient une ligne droite, et il est facile de voir que l'équation (3) revient à

$$M''_1 + M'_1 = 0,$$

ce qui exprime que la droite est parallèle au grand axe de l'ellipse.

» Dans l'approximation suivante, l'équation (7) donne

$$M''_1 \frac{1-x''}{2} + M'_1 \frac{1-x'}{2} - M''_2\left(\frac{1-x''}{2}\right)^2 - M'_2\left(\frac{1-x'}{2}\right)^2 = C.$$

M'_2 et M''_2 ont le même signe; la courbe (C) est alors une ellipse (E′) dont les axes sont parallèles aux axes de coordonnées. Nous sommes donc amené à chercher l'intersection des deux ellipses (E) et (E′). L'ellipse (E′) passe par le point M_0, intérieur à (E); le calcul numérique montre que, pour $a = a_0$ et pour les valeurs voisines, le centre de la seconde ellipse est extérieur à la première. Nos courbes se couperont donc toujours au moins en deux points; elles pourront aussi être tangentes ou se couper en quatre points.

» S'il arrive que, en donnant à a une série de valeurs, on passe par une valeur a_1 pour laquelle les deux ellipses soient tangentes, et que, pour $a < a_1$, on ait deux points d'intersection et quatre pour $a > a_1$, l'amplitude des variations de x'' se trouvera brusquement modifiée quand a passera par la valeur a_1.

» J'abandonne maintenant cette seconde approximation pour revenir à l'équation générale (7), que j'écris comme il suit :

$$X'' + X' = C, \tag{10}$$

en posant

$$\left\{\begin{aligned} X'' &= M''_1 \frac{1-x''}{2} - M''_2\left(\frac{1-x''}{2}\right)^2 + M''_3\left(\frac{1-x''}{2}\right)^3 - \ldots, \\ X' &= M'_1 \frac{1-x'}{2} - M'_2\left(\frac{1-x'}{2}\right)^2 + M'_3\left(\frac{1-x'}{2}\right)^3 - \ldots. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

» J'ai considéré dix valeurs numériques équidistantes de a, la première étant 1,98021, et la dernière 2,08021; on voit que la cinquième de ces valeurs est précisément a_0, et, pour chacune de ces dix valeurs de a, j'ai construit une Table numérique donnant la valeur de X'' avec l'argument $\nu'' = \frac{1-x''}{2}$, et une autre Table donnant de même X' avec l'argument $\nu' = \frac{1-x'}{2}$. L'emploi de ces vingt Tables permettra, dans chaque cas, pour des valeurs de a comprises entre les limites fixées plus haut, et pour des valeurs données de x'_0 et x''_0, valeurs de x' et x'' pour $t = 0$, de déterminer numériquement les limites entre lesquelles varieront x' et x''. On com-

prend, en effet, que l'emploi de ces Tables permettra de résoudre numériquement les équations (7) et (9).

» J'ai fait une application de ce qui précède au cas où, à l'origine, les pôles des trois orbites forment un triangle sphérique équilatéral. On a alors

$$x'_0 = x''_0 = x_0 = \cos 1^\circ 15' 14''.$$

» Je vais indiquer le résultat de mes calculs par le Tableau suivant, dans lequel L désigne le maximum de l'inclinaison de l'orbite de la planète m sur l'orbite de Jupiter :

N°.	L.	N°.	L.
	° ′		° ′
I	6.40	VI	18. 9
II........	8.12	VII.......	20.43
III.......	10.15	VIII.....	23. 8
IV	12.45	IX.......	9.28
V........	15.27	X........	6.50

» On voit que, a variant de sa huitième à sa neuvième valeur, c'est-à-dire de 2,04021 à 2,06021, la limite L s'abaisse brusquement de 23° 8′ à 9° 28′. C'est que, dans l'intervalle, la courbe (C) est devenue tangente à l'ellipse (E). J'ai trouvé que cela a lieu pour

$$a = a_1 = 2,05480,$$

et j'ai montré que, quand a est un peu plus petit que a_1, l'inclinaison de l'orbite de m sur l'orbite de Jupiter peut s'élever à 24° 43′ environ, et que, pour peu que a dépasse cette valeur a_1, le maximum précédent s'abaisse à 12° 25′, c'est-à-dire qu'il diminue de moitié.

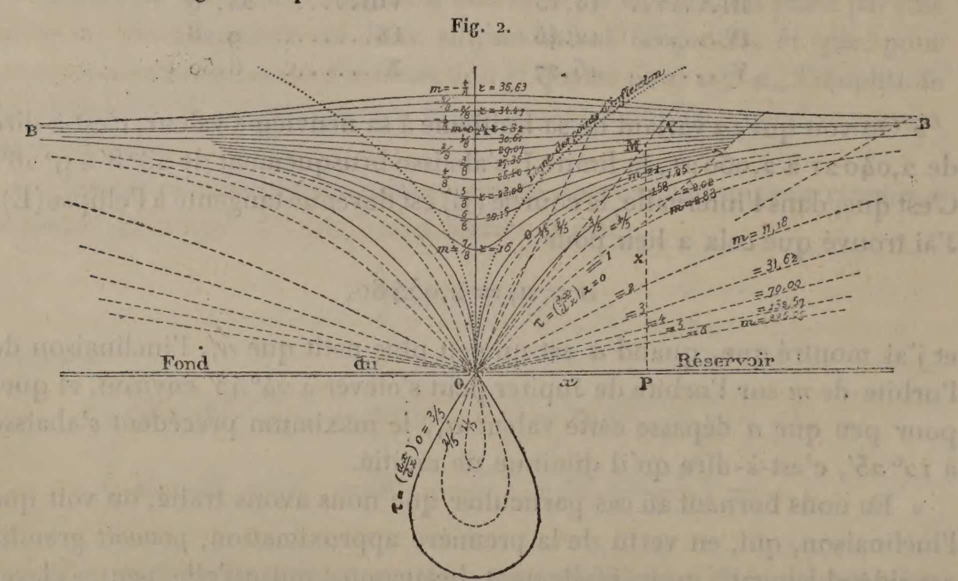
» En nous bornant au cas particulier que nous avons traité, on voit que l'inclinaison, qui, en vertu de la première approximation, *pouvait* grandir considérablement, croît réellement beaucoup, puisqu'elle peut s'élever jusqu'à près de 25°; mais, pour $a < 1,98021$ ou $a > 2,08021$, ce maximum devient inférieur à 7°. Il existe donc, dans le voisinage de $a = 2$, autour du Soleil, une région resserrée où les inclinaisons d'un astéroïde sur le plan de l'orbite de Jupiter peuvent atteindre des valeurs très notables, et il est bien remarquable que cette région coïncide avec la limite inférieure des moyennes distances au Soleil des petites planètes actuellement connues. »

HYDRODYNAMIQUE. — *Des mouvements que prennent les diverses parties d'un liquide dans l'intérieur d'un vase ou réservoir d'où il s'écoule par un orifice;* par M. DE SAINT-VENANT.

« 5. Il y a, comme nous avons dit dans notre article du 3 avril (p. 904), un moyen, meilleur que le procédé graphique de la *fig.* 1, pour connaître, surtout dans les parties inférieures du réservoir, jusqu'à des époques aussi éloignées qu'on veut, et même, à l'opposé, rétrospectivement, les curieuses courbes transformées des lignes fluides formées par les molécules dans l'intérieur du réservoir d'où l'eau s'écoule d'une manière permanente ou non permanente.

» C'est de déterminer et de construire par points leurs équations en coordonnées rectangles ou polaires.

Fig. 2.



» Soit, par exemple, toujours (*fig.* 2), la ligne d'eau horizontale BAB, parallèle au fond du réservoir percé du petit orifice. Appelons, en prenant pour origine et pour pôle le centre de celui-ci :

a la distance OA;

a' le rayon vecteur OA′ d'un point quelconque A′ de BAB;

r le rayon vecteur OM du point M où sera arrivée la molécule A′ lorsque se sera écoulée, par l'orifice, la proportion m du volume $\frac{2}{3}\pi a^3$ de la demi-sphère fluide de rayon OA.

» Soient encore α l'angle AOA′, et x, z les coordonnées rectangles OP,

PM du point M, enfin $\mathfrak{r}$ le rayon vecteur répondant à $a' = a$, ou l'ordonnée z du sommet de chaque transformée.

» Comme le volume d'eau $m\frac{2\pi}{3}a^3$ écoulé pendant que A' arrivera en M devra être égal à la différence des volumes des deux demi-sphères de rayons $OA' = a'$ et $OM = r$, si l'on divise les trois volumes par $\frac{2}{3}\pi$, on devra avoir

$$a'^3 - r^3 = ma^3,$$

d'où

$$(10) \qquad r = \sqrt[3]{a'^3 - ma^3} = a\sqrt[3]{\left(\frac{a'}{a}\right)^3 - m} = a\sqrt[3]{\frac{1}{\cos^3\alpha} - m}.$$

» En choisissant comme on voudra une valeur de l'angle polaire α, ou, plus facilement, une valeur du rapport $\frac{a'}{a}$ des deux longueurs OA', OA, et en donnant ensuite à la fraction m une suite de valeurs, on obtiendra, sur la ligne OA', un pareil nombre de points où arrivera successivement la molécule A'.

» C'est ainsi, en supposant $a = 32^{\text{mm}}$, que nous avons, sur les lignes inclinées $a' = \frac{9}{8}a, \frac{5}{4}a, \frac{3}{2}a, 2a$, obtenu les rayons vecteurs r, et par conséquent les divers points des sept transformées dont les sommets, situés sur OA, portent les cotes $m = \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \ldots, \frac{7}{8}$, fractions substituées dans

$$(11) \qquad r = 32\sqrt[3]{\left(\frac{a'}{a}\right)^3 - m} = 16\sqrt[3]{\left(2\frac{a'}{a}\right)^3 - 8m}.$$

» Comme (10) ne change pas en changeant α en $-\alpha$, elles sont toutes symétriques par rapport à OA.

» Dans cette formule (11), on peut donner à m *des valeurs négatives*. On obtient ainsi des transformées rétrospectives de la droite BAB, ou les courbes fluides *qui se transforment en cette droite* quand il s'est écoulé une ou plusieurs fois le $\frac{1}{8}$ du volume $\frac{2}{3}\pi a^3$. Telles sont les quatre courbes près des sommets desquelles nous avons écrit $m = -\frac{1}{8}, -\frac{2}{8}, -\frac{3}{8}, -\frac{4}{8}$. Elles ont, comme les courbes répondant à m positif, la droite BAB pour asymptote.

» La transformée $m = \frac{7}{8}$ a, pour son rayon vecteur $\mathfrak{r}$ répondant à $a' = a$,

$$r = \mathfrak{r} = z \ (\text{pour } x = 0) = a\sqrt[3]{1 - \frac{7}{8}} = \frac{a}{2}.$$

» 6. Pour des valeurs positives de m entre $\frac{7}{8}$ et a, comme les rayons

vecteurs r fournis par l'équation polaire (10) ou (11) coupent trop obliquement les transformées, il est préférable d'en obtenir les points en établissant l'équation de celles-ci en coordonnées rectangles x, z.

» On obtient cette équation en remarquant que

$$\frac{x}{z}=\frac{\sqrt{a'^2-a^2}}{a},\quad x=\pm z\sqrt{\left(\frac{a'}{a}\right)^2-1},\quad \frac{z}{a}=\frac{r}{a'},$$

d'où

$$(13)\qquad \frac{z^3}{a^3}=\frac{a'^3-ma^3}{a'^3}=1-m\left(\frac{a}{a'}\right)^3,\quad \frac{a'}{a}=\left(\frac{m}{1-\frac{z^3}{a^3}}\right)^{\frac{1}{3}},$$

qui, substitué, donne pour l'équation désirée, en $x=\mathrm{OP}$, $z=\mathrm{PM}$, de toutes les transformées de la ligne BAB_1, ou *pour toutes les coupes méridiennes* des surfaces de révolution dans lesquelles se transforme le plan BAB parallèle au fond,

$$(14)\qquad x=\pm z\sqrt{\left(\frac{m}{1-\frac{z^3}{a^3}}\right)^{\frac{2}{3}}-1}.$$

» Cette équation, quand on y fait $x=0$, donne, résolue en z, les trois racines

$$(15)\qquad z=0,\quad z=a\sqrt[3]{1-m},\quad z=a\sqrt[3]{1+m}.$$

» Elle représente donc à la fois, pour toute valeur plus petite que 1 :

» 1° Un point *isolé* ou *conjugué*, savoir le point $\mathrm{O}(x=0,\ z=0)$;

» 2° et 3° Deux branches, savoir une de celles qui ont leur sommet entre A et O, et une de celles qui ont leur sommet au-dessous de A.

» 7. Différentiée en z, cette même équation (14) donne

$$(16)\qquad \frac{dx}{dz}=\frac{\dfrac{m^{\frac{2}{3}}}{\left(1-\frac{z^3}{a^3}\right)^{\frac{5}{3}}}-1}{\sqrt{\left(\frac{m}{1-\frac{z^3}{a^3}}\right)^{\frac{2}{3}}-1}},\quad \left(\frac{dx}{dz}\right)_{z=0}=\sqrt{m^{\frac{2}{3}}-1},\quad \left(\frac{dx}{dz}\right)_{z=a}=\infty.$$

Ainsi $\frac{dx}{dz}$, au point $z=0$, est nul pour $m=1$, ce qui prouve que la courbe répondant à $m=1$ est la transformée qu'on a au moment où tout

le volume fluide $\frac{2}{3}\pi a^3$ est passé par l'orifice, *à un point de rebroussement* en O.

» Différentiant encore, on trouve

$$a^2\frac{d^2x}{dz^2}=\frac{z^3}{a^3}\frac{m^{\frac{2}{3}}}{\left(1-\frac{z^3}{a^3}\right)^{\frac{8}{3}}}\left[\left(\frac{m}{1-\frac{z^3}{a^3}}\right)^{\frac{2}{3}}-1\right]^{-\frac{2}{3}}\left[4\left(\frac{m}{1-\frac{z^3}{a^3}}\right)^{\frac{2}{3}}-4-\frac{z^3}{a^3}\right],$$

ou, d'après ce que donne pour $\frac{x^2}{z^2}$ l'équation (14) élevée au carré,

$$(18)\qquad \frac{d^2x}{dz^2}=\frac{z^3}{a^3}m^{\frac{2}{3}}\left(1-\frac{z^3}{a^3}\right)^{-\frac{8}{3}}\cdot\left(4\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^5}{a^5}\right);$$

quantité nulle pour $z=0$ et infinie pour $z=a$; mais nulle aussi, comme M. Boussinesq me l'a fait remarquer, pour tous les points d'une courbe dont l'équation est

$$(19)\qquad \frac{4x^2}{a^2}-\frac{z^5}{a^5}=0,\quad \frac{x}{a}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{z^5}{a^5}}.$$

» Cette courbe, qui a un point de rebroussement en O, est le lieu des points d'inflexion de toutes les transformées (17). C'est celle que nous avons tracée en ponctué de part et d'autre de OA.

8. Quand $m>1$, ou après que la demi-sphère fluide de rayon $OA=a$ est passée par l'orifice, l'affluence du liquide dont la masse est indéfinie continue de produire des transformées de la ligne BAB. En appelant τ la tangente trigonométrique de l'angle que fait avec OA la tangente menée en O à une quelconque de ces transformées, l'équation (14) ou (16) donne

$$(20)\qquad \tau=\left(\frac{x}{z}\right)_{z=0}=\left(\frac{dx}{dz}\right)_{z=0}=\sqrt{m^{\frac{2}{3}}-1},\quad \text{d'où}\quad m=(1+\tau^2)^{\frac{3}{2}}.$$

» Toutes ces transformées $m>1$, dont l'équation sera toujours celle (14), ont en O un point multiple ou offrent l'intersection de deux demi-branches faisant entre elles un angle dont la moitié a pour tangente trigonométrique τ.

» Elles ont des sommets, mais placés *au-dessous* de O, et dont les ordonnées s'obtiennent en faisant $x=0$ dans (14), ce qui donne, outre $z=0$,

$$(21)\qquad z=-a\sqrt[3]{m-1}.$$

Chacune de ces courbes forme ainsi, au-dessous du fond et de l'orifice, une

boucle ou rosette étrangère à la question physique; leurs plus grandes abscisses ou demi-largeurs sont $\left(m^{\frac{2}{3}} - 1\right)^{\frac{5}{6}}_{a}$ et les ordonnées correspondantes sont $-a\sqrt[3]{m^{\frac{2}{3}} - 1}$.

» Leurs parties *physiques* ou au-dessus du fond ont, comme les courbes $m < 1$, BAB pour asymptote; elles se rapprochent de plus en plus du fond à mesure que m augmente, mais elles ne s'y étaleraient que pour $m = \infty$.

» La courbe $m = 1$ à rebroussement en O opère leur liaison avec les transformées du système $m < 1$.

» Nous avons tracé par points sept de ces courbes $m > 1$, et les rosettes ou prolongements idéaux de trois d'entre elles. Elles répondent à

$\left(\frac{dx}{dz}\right)_{z=0} = \tau =$	0,	$\frac{1}{5}$,	$\frac{2}{5}$,	$\frac{3}{5}$,	1,	2,	3,	4,	5,	6,
$m^{\frac{2}{3}} = 1 + \tau^2 =$	1,	1,04,	1,16,	1,36,	2,	5,	10,			
$m =$	1,	1,061,	1,249,	1,582,	2,828,	11,180,	31,63,	70,09,	132,6,	225,1,

Plus grandes abscisses des rosettes .... $x = 0{,}046a$, $0{,}138a$, $0{,}264a$

Ordonnées correspondantes .... $-z = 0{,}288a$, $0{,}453a$, $0{,}587a$

» Dans une dernière Communication nous donnerons la loi des vitesses dans les masses d'eau dont les dimensions latérales sont finies, ou dans des vases à parois verticales dont les orifices pourront être proches. »

MÉCANIQUE CÉLESTE. — *Essai philosophique sur la méthode nommée par son auteur « Science de l'ordre »*; par M. **Yvon Villarceau.**

« Je me propose de montrer ici comment, en se laissant guider par une philosophie qui n'est autre que celle du bon sens, appliqué à établir un rapprochement convenable entre les conditions du problème à résoudre et les principes généraux de la Science, on est directement conduit à édifier la *Science de l'ordre*; je montrerai également qu'un simple défaut d'attention suffit pour produire la déviation qui conduit à la *Science* appelée, par Wronski, d'un nom que je veux éviter de reproduire.

» Avant d'entrer en matière, je présenterai quelques mots d'explication au sujet du Mémoire qui a été inséré au tome II des *Annales du Bureau des Longitudes*. Le but de ce Mémoire était de vérifier l'exactitude des formules de Wronski : dans ce travail d'investigation, je me suis laissé guider

par l'auteur de la nouvelle méthode, tant que j'ai cru saisir son idée; et, sans rien sacrifier de l'exactitude des théories générales de la Mécanique céleste, j'ai atteint le but proposé. J'ai fait remarquer qu'il eût été facile de reprendre la rédaction de mon travail, en vue des conclusions qui s'en dégagent; mais il a paru préférable de le publier sans y rien changer.

» Ce travail offre le champ libre à la discussion et l'on ne trouvera pas mauvais que je l'engage moi-même.

» Je demande la permission d'expliquer préalablement comment je comprends l'usage du bon sens, dans le problème du mouvement des corps célestes; pour cela, j'examinerai deux manières distinctes d'aborder la question du mouvement d'un point matériel, sollicité par des forces connues F.

» Le principe général de la dynamique d'un point matériel m se résume dans la relation fondamentale

$$(a) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma\, \mathrm{F}\cos(\mathrm{F}, x),$$

où x désigne l'abscisse de m, parallèle à un axe fixe des x, dont la direction est *quelconque*.

» L'une des deux manières consiste à écrire deux autres relations pareilles à la formule (a), en y changeant x en y et en z : on forme ainsi trois équations différentielles du second ordre qu'il reste à intégrer. Observons d'abord que ces équations, tant que les directions des trois axes restent *indéterminées*, n'apprennent rien directement sur le mouvement du point m dans l'espace, et qu'il est nécessaire d'effectuer certaines combinaisons de ces équations, pour en dégager quelques théorèmes.

» L'autre manière consiste à faire un choix *déterminé* de l'axe sur lequel on projette les vitesses et les forces [1]. Si, par exemple, on fait successivement coïncider la direction de l'axe fixe avec les directions *momentanées* de la vitesse, du rayon de courbure et de la normale au plan osculateur, on obtient immédiatement trois théorèmes bien connus, qui établissent des

---

[1] En faisant l'application de ce principe aux trois directions des axes mobiles des x_1, y_1, z_1, de l'expression générale de la composante des forces perturbatrices, obtenue relativement à une direction fixe quelconque de l'axe des x, nous aurions déduit directement, de la composante X (p. 58 du Mémoire), les expressions (119) des composantes X_1, Y_1, Z_1, qui ont été obtenues au moyen de l'analyse des coordonnées rectangulaires, suivant une habitude à laquelle on cède quelquefois trop facilement.

relations entre les composantes des forces suivant les trois directions, la vitesse, sa dérivée première et le rayon de courbure, relations éminemment simples.

» Ce préambule a pour unique objet de montrer l'importance d'un choix convenable de la direction des axes de projection des forces et des vitesses.

» Revenons au problème du mouvement d'un corps céleste, sollicité par une force prépondérante qui émane du Soleil, et par les forces perturbatrices, produites par l'action des planètes. Ce problème donne lieu à deux problèmes distincts qu'il sera évidemment avantageux de traiter séparément : 1° le mouvement dans le plan *temporaire* de l'orbite, déterminé par deux rayons vecteurs consécutifs, ayant leur origine au centre du Soleil; 2° le mouvement de ce même plan.

» Si l'on désigne par x_1, y_1, z_1 trois axes de projection, pris, les deux premiers, dans le plan de l'orbite, et le troisième normalement à ce plan, le mouvement dans le plan de l'orbite ne dépendra que des composantes des forces suivant les axes des x_1 et y_1 : en le supposant déterminé, les composantes suivant z_1 détermineront spécialement le mouvement du plan lui-même; comme ces dernières composantes sont normales au rayon vecteur, elles ne dépendront que des forces perturbatrices.

» Il reste, en ce qui concerne le mouvement dans le plan de l'orbite, à choisir entre les diverses droites situées dans ce plan, pour assigner les directions des axes des x_1 et des y_1. Or, si l'on prend, pour la première, celle du rayon vecteur, et, pour la deuxième, une perpendiculaire à ce rayon, les composantes suivant x_1 se réduiront à l'action solaire prise en signe contraire, et aux composantes des forces perturbatrices suivant le même axe; tandis que les composantes suivant y_1 ne dépendront que des forces perturbatrices.

» On remarquera qu'avec ce système d'axes l'action solaire ne figure que dans une seule des trois composantes et qu'elle y entre en vraie grandeur. Tout autre système des axes des x_1 et y_1, celui, par exemple, qui consisterait à prendre la direction de la vitesse et une normale à cette vitesse, donnerait lieu à deux composantes qui, l'une et l'autre, contiendraient les projections de l'action solaire sur les axes ainsi choisis.

» En ne considérant donc que la simplicité des expressions des composantes des forces, on est conduit à choisir, pour axes de projection, la direction du rayon vecteur, celle d'une perpendiculaire à ce rayon, menée dans le plan de l'orbite, et la direction de la normale au même plan.

» Cela peut faire présumer, mais ne prouve pas, que les expressions des dérivées des coordonnées, parallèles aux axes, jouiront du même degré de simplicité que les composantes des forces. Toutefois, la vérification est facile et elle prononce en faveur du système proposé, eu égard à l'extrême simplicité que présentent les résultats, lorsqu'on effectue les premières intégrations, sans rien négliger.

» Je viens d'indiquer comment on arrive naturellement, pour ainsi dire, à fixer le choix des axes : Wronski a pu le faire, en se basant sur des considérations d'une autre nature ; il ne lui en reste pas moins le haut mérite de l'invention. (Les *Prolégomènes du Messianisme* ont été publiés le 15 août 1842.)

» Le choix des axes étant fixé, comme il vient d'être dit, il s'agit de former les équations différentielles correspondantes, suivant la théorie des mouvements relatifs : on peut y parvenir de diverses manières, entre lesquelles j'ai préféré l'emploi de la méthode que fournit l'analyse des coordonnées rectangulaires.

» De quelque autre manière que l'on s'y prenne, on arrivera nécessairement aux relations suivantes [éq. (14), (15) et (16) du Mémoire précité] :

$$(b) \qquad k = \int Y_1 r\, dt,$$

$$(c) \qquad r^2 \frac{d\Phi}{dt} = k,$$

$$(d) \qquad \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{f\mu - X_1 r^2}{r^2} + \frac{k^2}{r^3},$$

dans lesquelles X_1 et Y_1 désignent les sommes des composantes des forces perturbatrices suivant x_1 et y_1, $\frac{f\mu}{r^2}$ l'action solaire, r le rayon vecteur et Φ l'angle de r, avec une droite fixe, prise dans le plan mobile de l'orbite. (Je ne reproduis pas ici les relations qui déterminent le mouvement du plan de l'orbite, et sur lesquelles il n'y a lieu de faire aucune remarque.)

» Pour effectuer une première intégration des équations (c) et (d), on transformera la seconde, en posant

$$(e) \qquad \frac{k^2}{p} = f\mu - X_1 r^2,$$

relation où p désigne une nouvelle variable, dont la signification géométrique résultera des intégrations : l'équation (d) sera ainsi remplacée par la suivante

$$(f)\qquad \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{k^2}{pr^2} + \frac{k^2}{r^3} \text{ (1)}$$

[on voit que la forme donnée à la relation (e) est, pour ainsi dire, dictée par la considération de l'homogénéité.]

» Je multiplie (f) par $2dr$, et j'intègre le second membre par parties, ce qui permet de ranger à part les termes, très peu variables, qui dépendent des différentielles de k et de p. Posant, en conséquence,

$$(g)\qquad \mathrm{U} = 2\int \frac{1}{r}\, d\frac{k^2}{p} - 2\int \frac{k}{r^3}\, dk,$$

j'obtiens immédiatement

$$(h)\qquad \frac{dr^2}{dt^2} = 2\frac{k^2}{pr} - \frac{k^2}{r^2} - \mathrm{U}.$$

» Si l'on élimine dt entre celle-ci et l'équation (c), on a, pour équation différentielle de la trajectoire,

$$(i)\qquad \frac{1}{r^2}\frac{dr^2}{d\Phi^2} = 2\frac{r}{p} - 1 - \mathrm{U}\frac{r^2}{k^2}.$$

» Comme on n'a pas distingué, jusqu'ici, entre les mouvements *troublé* et *non troublé*, les expressions (c) et (h) suffisent pour faire voir que les expressions des dérivées premières de Φ et de r conserveront la même forme *dans les deux cas;* les valeurs des auxiliaires k, p, U et le rayon vecteur r acquerront seulement des valeurs spéciales à l'un et l'autre.

» Le reste des calculs s'effectuerait en suivant la marche adoptée dans le Mémoire, à cela près qu'on devrait éviter l'introduction de la quantité w dont il a été fait usage, et qui est liée à k et p par la relation $pw = k$.

» Il est actuellement essentiel de faire remarquer que l'on obtient, pour intégrales premières, les relations (c) et (h) qui sont *rigoureusement exactes*, ainsi que l'équation différentielle (i) de la trajectoire. C'est ici que la *Science de l'ordre* se distingue de l'autre science. Dans la première, on

(1) En procédant comme on le fait ici, on évite l'introduction d'une idée préconçue, consistant dans la modification de l'expression ordinaire du demi-paramètre et celle d'une nouvelle constantevariab le w [éq. (80) et (81) du Mémoire].

n'a besoin de recourir à la variation des constantes arbitraires que pour effectuer les intégrations restantes ou deux intégrations du premier ordre; tandis que, dans la seconde, les géomètres ont cru plus simple d'obtenir les intégrales du mouvement non troublé, en négligeant, tout d'abord, les forces perturbatrices dans les équations différentielles du deuxième ordre, et appliquant la méthode de la variation des constantes arbitraires, pour satisfaire finalement à ces équations : de là, « l'extrême complication » des résultats, que la *Science de l'ordre* évite en n'appliquant ladite méthode, répétons-le, qu'aux équations fournies par une première intégration.

» Tels sont les caractères distinctifs de la *Science de l'ordre* et de *l'ancienne Mécanique céleste*. On ne s'étonnera pas qu'une distinction de cette nature ait échappé aux géomètres : il existe des exemples de faits analogues; il suffira d'en rappeler un.

» Pendant longtemps, les géomètres ont été arrêtés par la difficulté qu'ils rencontraient à tenir compte de la variation du moyen mouvement n, dans la relation qui lie le temps t à l'anomalie excentrique : on trouvait d'abord que le terme nt donnait lieu au terme $t\,dn$, terme essentiellement séculaire. Après de longues discussions, on a fini par reconnaître que le terme nt, dans ladite relation, pouvait et devait être remplacé par $\int n\,dt$.

» En attendant qu'une philosophie supérieure nous trace une voie plus directe, on préférera sans doute suivre celle qu'on vient d'indiquer et qui permet d'édifier si facilement la *Science de l'ordre*. Quels que soient, au surplus, les perfectionnements des méthodes d'investigation que l'avenir réserve à la Science, grâce aux travaux de Wronski, la Mécanique céleste se trouve maintenant dégagée de complications, dont les astronomes-géomètres auront reconnu la véritable cause. »

PHYSIOLOGIE ANIMALE. — *Emploi de la photographie instantanée pour l'analyse des mouvements chez les animaux*; par M. **Marey**.

« Les expériences que j'ai l'honneur d'exposer devant l'Académie se rattachent anx études que j'ai faites il y a une douzaine d'années sur la locomotion animale, études que j'ai dû suspendre, mais que je compte reprendre aujourd'hui en les développant davantage.

» Mes premières expériences sur la locomotion étaient faites au moyen

de la chronographie ; elles traduisaient fidèlement les rythmes des allures de l'homme et des animaux, c'est-à-dire l'instant et la durée des appuis de chaque membre sur le sol. Plus tard, par une méthode déjà plus délicate, j'inscrivais les phases d'élévation et d'abaissement des ailes d'un oiseau qui vole, la trajectoire décrite dans l'espace par la pointe de l'aile, les changements du plan alaire, les oscillations du corps dans leurs rapports avec les mouvements du vol ([1]).

» Les renseignements donnés par la méthode graphique étaient d'une grande précision ; ils corrigeaient bien des erreurs d'observation et résolvaient certaines questions litigieuses de mécanique animale ; mais les notions fournies par cette méthode étaient encore incomplètes. Ainsi, en ce qui concerne les allures du cheval, j'ai essayé de faire représenter les attitudes de cet animal à différents instants du pas de chaque allure ; or, les figures faites d'après les données de la chronographie, parfaitement correctes pour la position des membres à l'appui, présentaient parfois des incorrections pour celle des membres au levé. J'en eus la preuve lorsque parurent les belles photographies instantanées de M. Muybridge, de San-Francisco, l'image d'un cheval saisie en $\frac{1}{500}$ de seconde donnant, même aux allures les plus rapides, l'attitude réelle presque aussi nettement que si l'animal eût été immobile.

» Le Journal *la Nature* venait de publier quelques-unes des figures de M. Muybridge ; je m'empressai d'écrire au rédacteur en chef, mon ami G. Tissandier, pour lui exprimer mon admiration pour ces belles expériences et pour le prier d'engager leur auteur à appliquer la photographie instantanée à l'étude du vol des oiseaux. J'émettais alors l'idée d'un fusil photographique à répétition analogue au revolver astronomique imaginé par notre confrère M. Janssen pour observer le dernier passage de Vénus. Ce fusil donnerait une série d'images successives prises à différents instants de la révolution de l'aile. Enfin, ces images, disposées sur un phénakisticope de Plateau, devraient reproduire l'apparence du mouvement des animaux ainsi représentés.

» Cette lettre me valut, de la part de M. Muybridge, l'envoi d'une collection de ses belles photographies et l'assurance qu'il appliquerait ses appareils à l'étude du mécanisme du vol ; en outre, différents auteurs adaptèrent à des zootropes, soit des figures construites d'après mes notations chrono-

---

([1]) *La machine animale*, 1re édition ; 1873.

graphiques, soit les images obtenues par le célèbre photographe américain, et obtinrent ainsi une représentation saisissante d'animaux en mouvement [1].

» Au mois de septembre dernier, M. Muybridge vint à Paris, apportant une riche collection de photographies instantanées qui représentaient, non seulement le cheval à diverses allures, mais l'homme se livrant à différents exercices : la course, le saut, l'escrime, la lutte, etc. Dans la collection de M. Muybridge il y avait aussi quelques photographies d'oiseaux au vol, mais ce n'était plus, comme pour l'homme ou le cheval, la représentation d'attitudes successives : c'étaient des images analogues à celles que M. Cailletet avait obtenues quelques années auparavant et montrant les ailes de l'oiseau dans une position unique, tantôt en élévation, tantôt en abaissement ou dans quelque phase intermédiaire. Ces photographies étaient cependant fort intéressantes : elles vérifiaient ce que la méthode graphique m'avait fait saisir relativement au mécanisme du vol, mais surtout promettaient des renseignements précieux, si l'on pouvait obtenir des images en série, comme M. Muybridge l'avait fait pour l'homme et pour les quadrupèdes.

» Je résolus de consacrer cet hiver à réaliser mon ancien projet de fusil photographique. Le procédé au gélatinobromure d'argent me faisait espérer des images assez nettes avec un temps de pose très court, mais la vitesse avec laquelle devaient se répéter les mouvements qui présenteraient au foyer de l'objectif des points différents de la plaque sensible entraînait certaines difficultés dans la construction de l'instrument. Il fallait, en effet, recueillir au moins dix ou douze images par seconde, afin d'avoir plusieurs attitudes de l'oiseau à chaque révolution de son aile. En outre, cette vitesse m'était imposée par le projet que j'avais formé de disposer la série d'images obtenues dans un phénakisticope, afin de reproduire l'apparence des mouvements du vol de l'oiseau; car on sait que la faible durée de la persistance des images sur la rétine nécessite une répétition fréquente des apparitions lumineuses pour donner à notre œil une sensation continue.

---

[1] Parmi les auteurs qui ont réalisé des zootropes avec les photographies instantanées, on doit citer M. Muybridge lui-même; en France, M. Mathias Duval, professeur d'anatomie à l'Ecole des Beaux-Arts, et le colonel Duhousset; en Hongrie, M. Ziekly, professeur à 'Ecole des Beaux-Arts de Buda-Pest; enfin, en Angleterre, plusieurs industriels vendaient, l'an dernier, des zootropes formés avec les figures que M. Muybridge a publiées.

» Je réussis à construire, dans les dimensions d'un fusil de chasse, un appareil qui photographie douze fois par seconde l'objet que l'on vise; chaque image n'exige, comme temps de pose, que $\frac{1}{720}$ de seconde.

» Le canon de ce fusil est un tube qui contient un objectif photographique. En arrière, et solidement montée sur la crosse, est une large culasse cylindrique dans laquelle est contenu un rouage d'horlogerie. Quand on presse la détente du fusil, le rouage se met en marche et imprime aux différentes pièces de l'instrument le mouvement nécessaire. Un axe central, qui fait douze tours par seconde, commande toutes les pièces de l'appareil. C'est d'abord un disque opaque et percé d'une étroite fenêtre. Ce disque forme obturateur et ne laisse pénétrer la lumière émanant de l'objectif que douze fois par seconde, et chaque fois pendant $\frac{1}{720}$ de seconde. Derrière ce premier disque, et tournant librement sur le même arbre, s'en trouve un autre qui porte douze fenêtres et en arrière duquel vient s'appliquer une glace sensible, de forme circulaire ou octogonale. Ce disque fenêtré doit tourner d'une manière intermittente, de façon à s'arrêter douze fois par seconde en face du faisceau de lumière qui pénètre dans l'instrument. Un excentrique placé sur l'arbre produit cette rotation saccadée, en imprimant un va-et-vient régulier à une tige à cliquet qui saisit à chaque oscillation une des dents qui forment une couronne au disque fenêtré.

» Un obturateur spécial arrête définitivement la pénétration de la lumière dans l'instrument aussitôt que les douze images ont été obtenues. D'autres dispositions ont pour but d'empêcher la plaque sensible de dépasser par sa vitesse acquise la place où le cliquet l'amène, et où elle doit être parfaitement immobile pendant la durée de l'impression lumineuse.

» On fait la mise au point en allongeant ou en raccourcissant le canon, ce qui déplace l'objectif en avant ou en arrière; enfin, on vérifie cette mise au point en observant, par une ouverture faite à la culasse du fusil, la netteté de l'image reçue sur un verre dépoli.

» Une *boîte à escamoter*, de forme circulaire, analogue à celles qui existent déjà dans le commerce, me sert à loger vingt-cinq plaques sensibles et à les faire passer dans le fusil sans qu'elles soient exposées à la lumière.

» Avant d'appliquer cet instrument à l'étude du vol, je le soumis à certaines épreuves expérimentales, et les résultats que j'obtins furent satisfaisants.

» On dispose, par exemple, une flèche noire sur un axe central autour

duquel elle tourne en se détachant sur un fond blanc bien éclairé par le soleil. La vitesse de rotation de la flèche est telle que ses extrémités parcourent environ 5^m par seconde, ce qui représente six tours. Le tireur, placé à 10^m, vise le centre de la cible sur lequel on n'aperçoit rien qu'une légère teinte grise générale, à cause de la vitesse de rotation. La plaque sensible, une fois développée, montre douze images disposées circulairement. Sur chacune d'elles la flèche se voit, avec son ombre portée, à peu près aussi nettement que si elle eût été immobile.

» Une autre fois je photographiai un pendule noir oscillant au devant d'une règle blanche portant des divisions. Le pendule battait les secondes, et j'obtins, en effet, douze images représentant les positions successives occupées par le pendule aux différentes phases d'une oscillation complète.

» Pour plus de sûreté dans la mesure des durées, j'adaptai au fusil un appareil chronographique formé d'une capsule à air qui reçoit un choc à chacun des déplacements de la plaque sensible; un tube de caoutchouc relie cette capsule à un appareil inscripteur qui trace sur un cylindre tournant, en même temps qu'un chronographe ou qu'un diapason d'un nombre de vibrations connu. De cette manière, la durée de l'impression lumineuse et l'intervalle de temps qui sépare les images sont mesurés avec une précision satisfaisante.

» Après ces expériences d'essai, j'abordai la photographie d'animaux en mouvement. On voit sur les épreuves une mouette qui vole. Sur d'autres, j'ai obtenu l'image de mouettes volant en plein travers; comme l'oiseau donnait exactement trois coups d'aile par seconde, on trouve dans les douze figures quatre attitudes successives qui se reproduisent périodiquement.

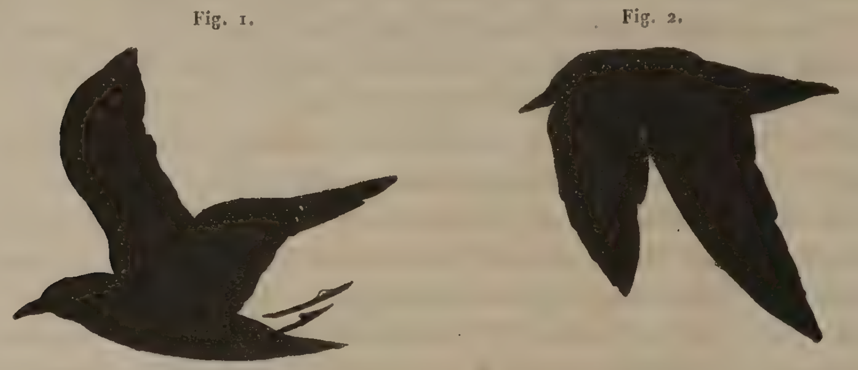
» Les ailes sont d'abord élevées au maximum, puis elles commencent à s'abaisser; dans l'image suivante, elles sont au plus bas de leur course, et dans la quatrième elles se relèvent. Une nouvelle série pareille de mouvements revient alors, et ainsi de suite.

» En agrandissant ces figures, on obtient des images visibles à distance, mais dont la netteté laisse encore à désirer; car mes clichés négatifs sont légèrement grenus, ce que j'attribue à mon peu d'expérience des procédés photographiques. La reproduction de ces images par l'héliogravure ne donne qu'une silhouette noire (*fig.* 1 et 2). Il ne faudrait pas croire, toutefois, qu'on ne puisse jamais obtenir un certain modelé dans les images. J'ai placé sous un microscope à faible grossissement des négatifs obtenus avec

une mise au point bien exacte : sur ces clichés, qui représentent l'oiseau vu d'en haut, on peut aisément compter les rémiges et saisir l'imbrication de ses plumes.

» Si l'on dispose des photographies d'oiseaux sur un phénakisticope, on reproduit bien l'apparence des mouvements du vol, mais les images correspondant à chaque révolution de l'aile sont encore trop peu nombreuses pour se bien prêter à l'analyse des mouvements du vol : il faudra donc en augmenter le nombre. On y peut arriver, par exemple, en doublant la vitesse du mouvement de la plaque et des obturateurs, ce que j'ai

Fig. 1. Fig. 2.



Début de l'abaissement de l'aile. Fin de l'abaissement de l'aile.

pu faire avec ce même fusil, tout en ayant encore assez de lumière pour la production des images : la durée de l'éclairage de la plaque n'était alors que de $\frac{1}{1400}$ de seconde; encore l'objectif employé n'était-il pas des plus rapides.

» En photographiant l'oiseau dans d'autres conditions, par exemple lorsqu'il s'éloigne de l'observateur ou qu'il s'en rapproche, lorsqu'il est vu par en dessous ou par en dessus, on obtient d'autres renseignements sur le mécanisme du vol; ainsi, on observe aisément les changements d'inclinaison du plan de l'aile, l'inflexion des rémiges sur la résistance de l'air, les mouvements par lesquels le corps se porte en avant pendant l'abaissement de l'aile, en arrière pendant l'élévation.

» J'ai déjà comparé, à cet égard, les renseignements donnés par la photographie à ceux que m'avait autrefois donnés la méthode graphique, et j'ai obtenu ainsi la confirmation des points principaux que je croyais avoir établis par la première de ces méthodes. Il ne paraît pas douteux que les images photographiques n'ajoutent beaucoup de connaissances nouvelles à celles que nous avons sur le mécanisme du vol. J'attends, pour émettre

à cet égard une opinion fondée, d'avoir recueilli les éléments nécessaires, c'est-à-dire un grand nombre d'images d'oiseaux d'espèces différentes, exécutant le vol ramé ou le planement, soit en temps calme, soit avec du vent soufflant dans des directions variées.

» La chauve-souris est difficile à photographier, à cause de son vol capricieux, de sa petite taille et de l'heure tardive à laquelle elle se montre. Mes meilleures plaques ne m'ont donné que cinq ou six images sur les douze changements de position de la plaque photographique; encore ces images étaient-elles parfois sur la limite du champ de l'instrument. Les rares expériences que j'ai pu faire sur cet animal m'ont toutefois montré

Fig. 3.

certains faits intéressants. On voit, sur les photographies (*fig*. 3), que l'angle d'oscillation des ailes de la chauve-souris est très étendu, surtout par en bas où, à la limite de leur abaissement, les deux ailes forment deux plans verticaux sensiblement parallèles. On constate en outre que la chauve-souris peut voler malgré l'ablation d'une notable étendue de la membrane de ses ailes, pourvu que la partie restante corresponde aux espaces interdigitaux. Ainsi, parmi les images que j'ai recueillies, il en est une qui se retrouve plusieurs fois : il s'agissait d'une chauve-souris dont l'humérus et l'avant-bras apparaissent entièrement dépourvus de membranes; à l'extrémité de l'aile on voit seulement une sorte de petit éventail formé des membranes

interdigitales. L'aile ainsi mutilée exécute des mouvements beaucoup plus étendus que celle qui est intacte.

» Le fusil photographique se prête également à l'étude du mouvement de différentes espèces d'animaux : j'ai photographié des chevaux, des ânes, des chiens, des hommes à pied ou sur des vélocipèdes ; mais je n'ai pas donné suite à ces expériences : elles rentrent dans le programme que M. Muybridge remplit avec tant de succès. Je me propose surtout d'étudier au moyen de la photographie le mécanisme du vol chez les diverses espèces animales. On entrevoit déjà qu'aux différentes formes des oiseaux et des insectes correspondent des différences dans la manière de voler; or rien ne paraît plus propre à éclairer le mécanisme du vol que cette comparaison de la fonction avec la conformation des organes chez les différentes espèces. »

BOTANIQUE FOSSILE. — *Sur quelques types de végétaux récemment observés à l'état fossile;* par M. G. de Saporta.

III. — *Terrain pliocène inférieur : Cinérites du Cantal.*

« M. B. Rames a poursuivi ses recherches relatives aux plantes fossiles ensevelies sous les amas de cendres consolidées, provenant des anciennes éruptions volcaniques du Cantal. Voici les principaux résultats qu'il m'a mis à même de constater.

» A deux écailles détachées des strobiles d'un *Abies*, recueillies dans le gisement du Pas-de-la-Mougudo, sont venus se joindre deux rameaux de la même espèce, garnis de feuilles insérées dans un ordre distique, et dont la structure caractéristique dénote sûrement la présence, sur les lieux, du premier Sapin tertiaire dont il nous soit donné d'observer à la fois les divers organes.

» Les feuilles ne sont pas échancrées-bifides au sommet, comme celles de l'*Abies cilicica*, Carr., ni aiguës comme celles de l'*Abies cephalonica*, Link., mais plutôt atténuées-obtuses, comme celles de l'*Abies numidica* de Lannoy; mais elles ressemblent particulièrement, par leur forme, leur dimension et leur disposition, à celles de l'*Abies Apollinis*, Rauch, sapin des montagnes du Parnasse, introduit dans nos cultures, qui représente une forme locale de l'*A. cephalonica*. Comme les écailles de l'espèce pliocène, dont la conservation est admirable, se rapprochent sensiblement de celles d'un *Abies*

cephalonica qui a fructifié chez moi, et qu'elles reproduisent aussi l'aspect de celles de l'*Abies numidica,* autant que j'ai pu en juger d'après des échantillons communiqués par M. Héring, il s'ensuit que ce sapin pliocène se range presque à une égale distance des deux races actuelles que je viens de citer. A raison même de cette double parenté, je propose de lui appliquer le nom d'*Abies intermedia.*

» Un autre gisement du Cantal, celui de Niac, exploité par le propriétaire ([1]) avec le zèle le plus louable, a droit à une mention toute spéciale. Le hêtre pliocène domine dans cette localité, accompagné d'un cortège d'espèces soit tertiaires, et par conséquent éteintes, au moins en Europe, soit encore vivantes et de nature à déterminer, par cela même, le vrai caractère de l'ancienne végétation.

» Parmi les espèces tertiaires, il faut signaler le *Corylus insignis,* Hr.; le *Planera Ungeri,* Ett.; l'*Acer pseudo-campestre,* Ung.; le *Tilia expansa,* Sap.; enfin le *Pterocarya denticulata,* O. Web., qui touche de très près, il est vrai, au *P. fraxinifolia,* Sp., actuel, de la région du Caucase.

» Parmi les espèces actuelles, je citerai le *Smilax mauritanica,* Desf., et le *Viburnum pseudo-tinus,* Sap., qui se confond presque avec notre laurier-tin. Je mentionnerai encore le *Viburnum rugosum,* Pers., des îles Canaries. Ces deux dernières espèces se retrouvent à Meximieux.

» Je ne saurais passer sous silence un *Ruscus,* assez peu distant de notre *Ruscus aculeatus,* et par-dessus tout la feuille déterminable d'une Renoncule, alliée de fort près au *Ranunculus philonotis,* Rets., espèce sylvicole qui habite de préférence les sols siliceux.

» Cette riche moisson a été complétée par la découverte des organes fructificateurs du hêtre pliocène, découverte qui permet de fixer d'une manière certaine les affinités d'une espèce qui couvrait alors l'Europe entière et que j'avais nommée *Fagus sylvatica pliocenica.* Ses feuilles paraissent offrir des passages gradués vers notre hêtre actuel, tout en manifestant une parenté évidente avec le *Fagus ferruginea* Michx., d'Amérique.

» Le hêtre européen du miocène supérieur et du pliocène inférieur ne constitue évidemment qu'une seule et même espèce. Il a reçu le nom de *Fagus Deucalionis* Ung. et de *Fagus attenuata* Gœpp. Il est répandu en Italie, à l'époque des couches à congéries et se montre également à Schossnitz en Silésie. L'involucre figuré par Ludwig sous le nom de *Fagus horrida,* et qui

---

([1]) Ce propriétaire est M. Rebeyrols, ancien instituteur, aussi honorable qu'intelligent et dévoué au progrès de la science.

provient du miocène récent de Kaichen en Vétéravie, a dû appartenir à la même espèce, dont les aptitudes à un climat plus chaud, sinon moins humide, que celui qui convient à notre *F. sylvatica*, se trouve attestée par son association, à Niac, avec la *Smilax mauritanica* qu'il serait impossible de signaler de nos jours à côté du hêtre.

» Les deux fruits ou plutôt les deux involucres trouvés à Niac ont à peu près la forme et les dimensions de ceux du *F. ferruginea*, qui sont notablement plus petits que ceux de l'espèce européenne. Les valves de l'organe fossile sont hérissées à l'extérieur d'appendices plus courts, plus raides, plus régulièrement recourbés en dehors et moins divariqués que ceux de différentes variétés de notre hêtre. Par ces côtés, l'arbre pliocène se rapproche évidemment de celui d'Amérique.

» Mais il se distingue fort nettement des deux espèces vivantes par les dimensions du pédoncule, dont la longueur excède notablement celle de l'involucre même, tandis que, dans les *Fagus ferruginea* et *sylvatica*, les pédoncules fructifères sont plus courts que l'involucre ou l'égalent à peine. Par leur grosseur, les involucres fossiles tiennent exactement le milieu entre ceux des deux espèces actuelles. Leurs valves ont plutôt la forme de celles des involucres du *F. sylvatica*, mais les piquants dont elles sont hérissées affectent, par leur consistance plus raide, par leur direction recourbée et non divariquée, la physionomie de ceux qui distinguent l'espèce d'Amérique. Le hêtre européen pliocène mérite donc, à raison même de ses traits mixtes, une désignation spéciale, celle de *Fagus pliocenica*, qui s'appliquera à toutes les variétés signalées jusqu'ici à l'état fossile, sur notre continent, à partir du miocène récent et jusque vers le milieu de la période suivante. »

HYGIÈNE PUBLIQUE. — *Note sur les quarantaines imposées à Suez aux provenances maritimes de l'extrême Orient;* par M. DE LESSEPS.

« Tout en rendant justice aux efforts et au dévouement d'un médecin français, le Dr Ardouin, inspecteur général du service sanitaire, j'ai été témoin, pendant mon récent séjour en Égypte, de tant d'actes arbitraires, inutiles et ruineux pour le commerce, de la part d'une administration agissant sans responsabilité et sans règle fixe, que je me suis empressé, dès mon retour au milieu de vous, de vous entretenir d'une question sur laquelle vous pouvez éclairer le Gouvernement et l'opinion publique.

» Le remarquable Rapport présenté au Comité consultatif d'hygiène

publique par le Dr Fauvel, si compétent dans l'étude des quarantaines, a servi de base à notre règlement général de police sanitaire maritime du 22 février 1876.

» Tout partisan qu'il était du système quarantenaire, M. Fauvel n'en a pas moins prévu les améliorations que l'avenir pourrait y apporter, et il s'est exprimé ainsi :

« Sans doute il faut préserver la santé publique, mais il faut reconnaître aussi que ce devoir n'est pas toujours praticable avec la même facilité, et que d'un autre côté les précautions préventives sont toujours une gêne pour les relations maritimes, d'où la règle qu'elles doivent être appliquées dans la mesure qui concilie tous les intérêts.

» *Il est à peine nécessaire d'ajouter que les prescriptions du nouveau règlement n'ont pas la prétention d'être le dernier mot en matière de prophylaxie maritime.*

» *Il n'est pas impossible de prévoir le jour où, par la force irrésistible qui tend à multiplier les relations internationales, les quarantaines proprement dites disparaîtront et feront place, grâce aux progrès de l'hygiène, aux mesures d'un autre ordre....* »

» Il ajoute :

« Le choléra n'est jamais venu de l'Inde en Europe par la voie maritime.

» Or l'impossibilité de mettre obstacle à la marche des épidémies de choléra diminue naturellement et dans une forte proportion les garanties de la prophylaxie maritime. »

» Une conférence sanitaire internationale, précédemment réunie à Constantinople, avait déclaré qu'elle ne croyait pas que le choléra soit jamais venu directement de l'Inde à Suez ; elle a reconnu, au contraire, que les paquebots anglais et français qui font depuis tant d'années le service régulier entre l'Inde et l'Europe, par la voie d'Égypte, n'ont jamais apporté le choléra en Égypte (*Rapport général*, p. 32). Elle a déclaré qu'aucun fait, à sa connaissance, n'autorisait à croire que le choléra eût jamais été introduit à Suez ou en Europe par des marchandises venues de l'Inde.

» Liverpool, le Havre, qui reçoivent des balles de coton chargées dans tous les ports de l'Inde, aux bouches de l'Indus comme à l'entrée du Delta du Gange, Marseille qui voit arriver dans ses ports, par le canal de Suez, des cargaisons formées des éléments les plus divers et de toutes les provinces de l'Asie, n'ont jamais enregistré un seul cas de choléra qui pût être imputé à ces arrivages. Vouloir aujourd'hui soumettre, à Suez, comme on vient de le faire, tout le mouvement du commerce, qui de plus en plus se dirige vers la mer Rouge, à des restrictions et à des entraves qu'aucun fait nuisible à la santé publique n'a pu jusqu'ici justifier, voilà qui excède la juste mesure et ce qu'il paraît nécessaire de réformer. L'ancien système

compliqué de précautions inutiles et vexatoires que l'on a transporté en Égypte ne peut se soutenir par aucune considération plausible.

» Reste la question du pèlerinage.

» Le Rapport général de la Conférence dit :

« La caravane de pèlerins partie de la Mecque en proie au choléra n'a jamais importé la maladie à Damas... On peut en dire autant de la caravane qui, de la Mecque, retourne en Égypte par Suez; celle-ci non plus n'a jamais importé le choléra en Égypte...

» Une expérience qui remonte aux premières apparitions du choléra hors de l'Inde a démontré qu'une caravane nombreuse, partie d'un point où régnait le choléra, s'en débarrassait peu à peu dans sa marche à travers le désert, et arrivait entièrement purgée après un voyage d'une vingtaine de jours. »

» Le D^r Cazalas s'exprime ainsi :

« Le choléra est une maladie spécifique au même titre que la fièvre intermittente et la variole.

» Le choléra n'est pas seulement originaire de l'Inde, il peut prendre naissance spontanément partout.

» Le choléra n'est contagieux ni directement par le contact des personnes ou des choses, ni indirectement par le contact de l'air. Il se contracte par infection dans les foyers cholériques comme la fièvre intermittente par infection dans les foyers paludéens. »

» Les quarantaines sont donc un remède inutile et impuissant contre le choléra. Il faut frapper le mal et empêcher sa propagation dans les foyers où il se forme, dans les lieux de pèlerinage dans l'Inde et en Arabie, où des centaines de mille pèlerins s'accumulent dans les plus mauvaises conditions, lorsque le pèlerinage se fait dans la saison chaude. C'est ce qui a eu lieu cette année pour la première fois depuis longtemps, et ce qui se produira dans les dix années qui vont suivre, jusqu'à ce que le mois correspondant au Ramadan tombe de nouveau dans la saison froide.

» On reconnaît généralement que la fermentation putride des déjections de ces agglomérations humaines, campant pêle-mêle dans des espaces resserrés, émet l'agent toxique, en infecte l'air, et par ce véhicule principal agit sur les voies respiratoires; la même fermentation, par les eaux potables, peut attaquer les voies digestives.

» Le cholérique en lui-même n'est pas dangereux, même aux yeux de la Conférence de Constantinople, puisqu'elle admet qu'il ne communique pas la maladie par la peau, ni par l'exhalation pulmonaire, ni même par les émanations d'un cadavre.

» Que faudrait-il donc faire pour échapper à l'infection? Evidemment

supprimer la cause qui l'engendre, les déjections. Il ne faut pas qu'elles arrivent à fermenter. Il est donc nécessaire de les désinfecter, et de désinfecter aussi, ou mieux encore de détruire, tout objet susceptible d'être contaminé.

» C'est donc uniquement à cette cause, les *déjections à l'état putride*, se manifestant par deux voies principales, le sol et les objets mobiles, qu'il faut imputer la propagation épidémique du choléra, et l'on comprend qu'ayant presque toujours l'atmosphère, et parfois l'eau, pour véhicules, cette cause frappe tantôt un organisme isolé soumis aux effluves des matières qu'un cholérique a rejetées, tantôt, simultanément, des multitudes d'êtres humains réunis dans une circonscription, si la quantité des germes intoxicateurs est assez grande pour former un puissant foyer d'infection.

» Dans un Rapport présenté au Gouvernement bavarois à la suite de l'épidémie de 1854, une Commission spéciale de médecins a formulé les conclusions suivantes :

« Les mesures qui ont pour but de prévenir l'importation du choléra dans un pays qui en est encore indemne, ou d'en arrêter l'extension dans une localité atteinte, au moyen de l'interruption des communications et de la séquestration, sont inefficaces, inexécutables, nuisibles. »

» L'assemblée des médecins de Stockholm déclarant les quarantaines dangereuses a été du même avis.

» Il serait difficile, avec les préjugés dominant actuellement, de faire accepter l'abolition complète des quarantaines, mais lorsque les patentes sont nettes, et que l'équipage et les passagers n'inspirent aucune crainte, il n'est pas admissible de les retenir comme on l'a fait cette année à Suez. A l'avenir, si l'on a des soupçons, une simple observation de vingt-quatre heures serait suffisante pour constater l'absence de maladies contagieuses à bord des navires.

» Une nouvelle Conférence internationale, réunie à Paris, à Londres ou à Bruxelles, sur la demande de notre Gouvernement auprès des divers cabinets de l'Europe, apporterait certainement des modifications aux abus qui se produisent de la part de la Commission internationale égyptienne à l'égard des provenances de la mer Rouge à l'entrée du canal maritime de Suez; on pourrait en même temps prescrire des mesures pour ne pas laisser établir des foyers d'infection cholérique dans les pèlerinages de l'Arabie et de l'Inde.

» J'ai l'honneur de proposer à l'Académie de nommer une Commission

dont les conclusions permettraient au Gouvernement français d'entamer, sur ce sujet important, des négociations avec les gouvernements étrangers. »

Divers Membres de l'Académie, qui ne partagent pas, loin de là, les opinions de M. de Lesseps, présentent au Bureau, après la lecture de cette Note, des objections ou des réclamations dont M. Bouley se propose de se faire l'interprète dans une Communication spéciale et prochaine.

La question sera soumise à l'examen d'une Commission composée de MM. Wurtz, Pasteur, Bouley, Larrey, de Lesseps.

NOMINATIONS.

L'Académie procède, par la voie du scrutin, à la nomination de Commissions de prix, chargées de juger les Concours de l'année 1882.

Le dépouillement donne les résultats suivants :

Prix Barbier : MM. Gosselin, Vulpian, Chatin, Larrey et Pasteur réunissent la majorité absolue des suffrages. Les Membres qui après eux ont obtenu le plus de voix sont MM. P. Bert et Ch. Robin.

Prix Desmazières : MM. Duchartre, Van Tieghem, Trécul, Chatin et Cosson réunissent la majorité absolue des suffrages. Les Membres qui après eux ont obtenu le plus de voix sont MM. Robin et Pasteur.

Prix Thore : MM. Blanchard, H.-Milne Edwards, Ch. Robin, Chatin et de Lacaze-Duthiers réunissent la majorité absolue des suffrages. Les Membres qui après eux ont obtenu le plus de voix sont MM. Van Tieghem et Trécul.

Prix Vaillant (De l'inoculation comme moyen prophylactique des maladies contagieuses des animaux domestiques) : MM. Pasteur, Bouley, P. Bert, Vulpian et Gosselin réunissent la majorité absolue des suffrages. Les Membres qui après eux ont obtenu le plus de voix sont MM. H.-Milne Edwards et Chatin.

Grand prix des Sciences physiques (Étude du mode de distribution des animaux marins du littoral de la France) : MM. de Lacaze-Duthiers, H. Milne Edwards, Alph.-Milne Edwards, Blanchard et de Quatrefages réunissent la majorité absolue des suffrages. Les Membres qui après eux ont obtenu le plus de voix sont MM. Ch. Robin et P. Bert.

MÉMOIRES PRÉSENTÉS.

VITICULTURE. — *Sur la nécessité de détruire l'œuf d'hiver du Phylloxera.* Lettre de M. **Balbiani** à M. Dumas.

(Renvoi à la Commission du Phylloxera).

« Paris, 23 mars 1882.

» Dans ma Lettre, en date du 23 février dernier, adressée à M. le Ministre de l'Agriculture et insérée aux *Comptes rendus* du 13 mars, j'ai insisté sur la nécessité de commencer sans retard les expériences que l'Administration se proposait d'entreprendre en vue de la destruction de l'œuf d'hiver du Phylloxera. J'en ai donné pour raison : 1° la reprise de la végétation qui ne devait pas tarder, et qui eût pu rendre certaines opérations nuisibles pour la vigne; 2° l'éclosion prochaine de l'œuf d'hiver, à laquelle j'assignais pour époque le milieu du mois d'avril, d'après toutes les observations faites jusqu'à ce jour. Si, comme cela est à présumer, ces expériences n'ont pas encore été exécutées, j'ai le regret de vous informer qu'il est trop tard maintenant pour y procéder, attendu que les œufs d'hiver ont déjà commencé à éclore, au moins dans nos départements du Sud-Est, et que les éclosions ne tarderont pas non plus à devenir générales dans les autres régions de la France, ce qui va accroître encore le mal en intensité et en étendue.

» C'est la septième fois, depuis sa découverte, que l'œuf d'hiver éclôt librement chaque année dans nos vignobles, sans qu'aucune tentative ait été faite jusqu'ici pour s'y opposer, sauf par quelques agriculteurs isolés dont les efforts individuels n'ont reçu ni publicité ni encouragement. Heureusement pour eux qu'ils ont déjà bénéficié d'une pratique si rationnelle, à laquelle il n'a manqué qu'une voix autorisée pour la rendre plus générale. C'est donc encore une année de perdue pour les expériences à tenter contre l'œuf d'hiver. Il ne faut en accuser que la douceur exceptionnelle de l'hiver et les chaleurs insolites de ce mois de mars, qui ont avancé de plusieurs semaines le moment de son éclosion.

» Le 15 du présent mois, M. Marès, de Montpellier, eut l'obligeance de m'adresser quelques jeunes souches de Riparia, dont les feuilles s'étaient couvertes de nombreuses galles les années précédentes. Ces souches ont été examinées avec grand soin par mon préparateur, M. Henneguy, et moi.

Dès le surlendemain 17, nous découvrîmes sur une lanière d'écorce un jeune Phylloxera présentant tous les caractères de la progéniture des sexués. Un deuxième individu semblable fut aperçu le 21 mars, quoique les souches eussent été conservées dans un local froid et humide. Outre ces deux jeunes éclos, nous avons recueilli sur cinq souches seulement dix-huit œufs d'hiver renfermant tous un embryon près d'éclore ([1]).

» J'ai cru utile, Monsieur le Secrétaire perpétuel, d'appeler votre attention sur ces faits, d'abord à cause de l'intérêt pratique qu'ils présentent, même au point de vue de l'application des traitements dirigés contre les Phylloxeras radicicoles, dont les colonies sont entretenues et multipliées par l'œuf d'hiver, ensuite parce qu'ils prouvent qu'il faut se garder de généraliser à tout un pays les observations faites dans une seule région. C'est ainsi que M. Boiteau, ayant vainement cherché, à la fin de l'année dernière, l'œuf d'hiver dans les vignobles du Bordelais, attribuait son absence à la sècheresse persistante de l'été, qui avait empêché la production des ailés et des sexués. Il en concluait que cette année pouvait être considérée comme nulle au point de vue de la régénération de l'espèce par l'œuf fécondé (*Comptes rendus*, 5 décembre 1881). Or, dans le Midi, la sècheresse n'a pas été moins grande que dans la Gironde, ce qui n'a pas empêché les sexués et les œufs fécondés d'être aussi abondants que l'année précédente ([2]). Il peut y avoir dans l'évolution du parasite des variations locales dont la cause nous échappe, mais l'harmonie générale n'est point troublée. On n'aura que trop d'occasions de le constater cette année encore. »

VITICULTURE. — *Sur l'œuf d'hiver du Phylloxera*. Lettre de M. VALERY MAYET à M. Dumas.

(Renvoi à la Commission du Phylloxera.)

« Je viens de finir l'examen de la quantité considérable de bouts de sarments que j'avais rapportés, en décembre dernier, de Bordeaux et de Libourne.

» Avant de vous écrire, je tenais à terminer mon travail de loupe, espé-

---

([1]) Tous ces œufs ont été trouvés sur la souche même; il est donc inexact, comme le prétend M. Lichtenstein, qu'ils n'existent que sur les sarments et que, dès lors, les traitements appliqués aux ceps, après la taille, deviennent inutiles (*Comptes rendus*, 4 avril 1881).

([2]) MM. VALERY MAYET et LICHTENSTEIN, *Comptes rendus*, 28 mars et 4 avril 1881.

rant toujours vous annoncer un résultat. Hélas! M. Boiteau avait bien vu; impossible cette année de trouver un œuf d'hiver! et il est trop tard pour faire de nouvelles recherches. »

M. **Lechape** adresse une Note concernant la mesure des lignes dites *incommensurables*.

(Renvoi à l'examen de M. Hermite.)

M. **Michaud** adresse une Note concernant un nouveau système de pompes.

(Renvoi à l'examen de M. Tresca.)

M. **Cayrol-Castagnat** adresse une Note relative à la direction des aérostats.

(Renvoi à la Commission des aérostats.)

CORRESPONDANCE.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° Deux Opuscules de M. *C. Le Paige* « Sur la forme quadrilinéaire » et « Sur la théorie des formes binaires à plusieurs séries de variables » (présentés par M. Hermite);

2° Un Catalogue des étoiles circumpolaires australes, observées dans l'île de Sumatra par Fr. Houtman, en l'année 1600; traduit du hollandais par M. *Aristide Marre* (présenté par M. Yvon Villarceau).

M. **A. Bourgoin** prie l'Académie de le comprendre parmi les candidats à la place d'Académicien libre, laissée vacante par le décès de M. Bussy.

(Renvoi à la future Commission.)

ASTRONOMIE. — *Observations de la comète a 1882, faites à l'Observatoire de Lyon [équatorial Brünner, six pouces (0m,19)]*; par M. Gonnessiat.

Dates. 1882.	Étoiles de comp.	Grandeur.	Ascension droite. ✶☄ — ✶	Log. fact. par.	Déclinaison. ✶☄ — ✶	Log. fact. par.
			m s		′ ″	
Mars 28..	a	8,5	+ 1.34,24	— 1̄,703	— 3. 3,1	+ 0,571
31..	b	8	+ 1.23,14	— 1̄,719	+ 0.48,7	+ 0,601
Avril 2..	c	9	+ 0.20,33	— 1̄,727	— 3.38,8	+ 0,582
4..	d	8	— 2.24,96	— 1̄,349	— 2. 2,8	+ 0,154
6..	e	8,5	+ 3.36,05	— 1̄,761	— 0.27,9	+ 0,614
	f	9	+ 2.34,57		— 4.21,9	
7..	g	7	+ 2.39,48	— 1̄,764	+ 6.10,0	+ 0,694
8..	h	9	— 3. 9,81	— 1̄,772	+ 8.14,3	+ 0,717

Positions apparentes de la comète.

Dates. 1882.	Temps moyen de Lyon.	Ascension droite apparente.	Déclinaison apparente.	Nombre de comparaisons.	Autorité.
	h m s	h m s	° ′ ″		
Mars 28..	13. 1.12	18.10.15,16	+38.30.53,9	4 : 4 nuages	Lalande.
31..	12.34.22	18.16. 7,90	+40.28.31,4	12 : 11	Weisse.
Avril 2..	12.36.38	18.20.18,03	+41.52.10,1	10 : 10	Weisse (ét. interm.).
4..	15.57.55	18.25. 1,36	+43.26. 5,5	10 : 9	Lalande.
6..	11.52.49	18.29.17,07	+44.49.33,9	10 : 10	Weisse (cp. à 2 ét.).
7..	10.53.54	18.31.39,40	+45.34.46,1	13 : 12	Groombridge.
8..	10.49. 3	18.34.10,17	+46.22.46,2	8 : 7	*Ann. Bonn*, t. VI.

Positions des étoiles de comparaison.

Dates. 1882.	Étoiles de comparaison.	Ascension droite moyenne. 1882,0.	Réduction au jour.	Déclinaison moyenne. 1882,0.	Réduction au jour.
		h m s	s	° ′ ″	
Mars 28.	a, 33592 Lalande......	18. 8.39,64	+1,28	+38.34.10,8	—13,8
31.	b, 391-392 Weisse, XVII.	18.14.43,45	+1,31	+40.27.56,5	—13,8
Avril 2.	c, » »	18.19.56,38	+1,32	+41.56. 2,6	—13,7
4.	d, 34405 Lalande......	18.27.25,00	+1,32	+43.28.21,8	—13,5
6.	e, 723 Weisse, XVIII...	18.25.40,76	+1,37	+44.50.15,0	—13,6
	f, 761 »	18.26.42,01	+1,37	+44.54. 9,6	—13,5
7.	g, 2597 Groombridge...	18.28.58,55	+1,37	+45.41. 9,6	—13,4
8.	h, B.Z. 2529 + 46°....	18.37.18,63	+1,35	+46.14.45,0	—13,1

» L'étoile *c* a été comparée, avec l'équatorial, à 570 Weisse, XVIII :

c — ★ 570, —28s,65, —6′28″,9, 10 : 10 comparaisons. »

ASTRONOMIE. — *Observations de la comète a 1882, faites à l'Observatoire royal du Collège romain, avec l'équatorial de Merz*, transmises par M. P. TACCHINI.

Dates 1882.	Temps moyen de Rome.	Ascension droite apparente.	Déclinaison apparente.
	h m s	h m s	° ′ ″
Mars 25.......	13.34.46	18. 4.41,49 (9,701n)	+36.39.58,7 (0,484)
» 29.......	11.13.21	18.11.59,51 (9,757n)	+39. 5.38,0 (0,715)
Avril 2........	11.24.16	18.20. 9,46 (9,778n)	+41.49. 6,6 (0,670)
» 6.......	14.38. 7	18.29.33,62 (9,632n)	+44.54.34,9 (9,874)

ASTRONOMIE PHYSIQUE. — *Observations des éruptions solaires en 1881. Spectre de la comète Well.* Lettre de M. P. TACCHINI à M. le Président.

« Rome, le 7 avril 1882.

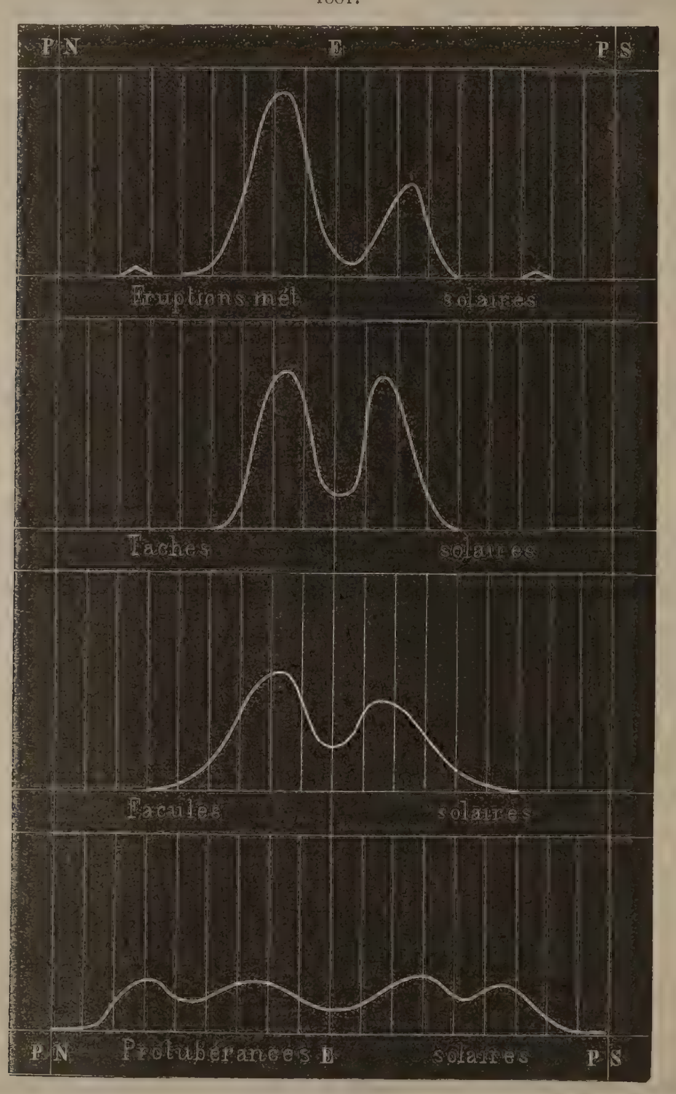
» Pour compléter les documents que j'ai adressés à l'Académie, sur les observations faites pendant l'année 1881, je donne ici le nombre et la distribution des éruptions solaires métalliques qui se sont produites dans les zones successives, de 10° en 10°, à partir de l'équateur. Le nombre des jours d'observation a été de 174 :

Latitudes.	Éruptions.	Latitudes.	Éruptions.
° °		° °	
+90 +80........	0	−90 −80.......	0
+80 +70........	0	−80 −70.......	0
+70 +60........	1	−70 −60.......	0
+60 +50........	0	−60 −50.......	1
+50 +40........	0	−50 −40.......	0
+40 +30........	2	−40 −30.......	1
+30 +20........	13	−30 −20.......	9
+20 +10........	18	−20 −10.......	4
+10 + 0........	6	−10 − 0.......	1

» Les éruptions solaires présentent donc deux maxima entre ±10° et ±30°, c'est-à-dire dans les deux zones de la plus grande fréquence des taches. Le nombre des éruptions dans l'hémisphère nord du Soleil a été bien plus grand qu'au sud, ce qui permet de conclure, même en considérant les autres phénomènes solaires, que l'activité a été plus grande dans l'hémisphère boréal du Soleil. Avec les résultats ci-dessus, et ceux qui sont relatifs aux taches, facules et protubérances, nous avons construit les

courbes suivantes, qui permettent de rapprocher les unes des autres les différentes séries des phénomènes solaires.

1881.



» J'ajouterai encore que, pendant l'année 1880, pour 198 jours d'observation, le nombre des éruptions métalliques solaires a été seulement 10, tandis qu'en 1881 le nombre s'est élevé à 40, ce qui indique une augmentation considérable dans l'activité solaire; mais il faut bien considérer que ce nombre est encore au-dessous de celui qui a été enregistré en 1874.

» Dans le premier trimestre de 1882, nous avons déjà observé trente éruptions métalliques; nous nous approchons donc assez vite du maximum.

» *P. S.* — Ce matin (7 avril), après avoir déterminé la position de la comète Well, j'ai cherché à en observer le spectre, quoique les conditions d'observation ne fussent pas favorables, à cause de la présence de la Lune. Le noyau de la comète donne un spectre continu, faible et très étroit, intercepté par trois points lumineux, à la place correspondant aux trois bandes du carbone, qui étaient, avec peine, visibles très près du spectre du noyau; le point central était le plus vif, ce qui indique que la bande correspondante doit être aussi la plus vive. Le noyau de la comète est comparable, à présent, à une étoile de 9^e grandeur, tandis qu'à l'époque de ma première observation, 14 mars, je l'ai estimé de 11^e grandeur. »

GÉOMÉTRIE. — *Sur les hypercycles.* Note de M. LAGUERRE.

« 14. Une des propriétés les plus utiles de l'hypercycle est la suivante :

» Considérons les quatre tangentes communes A, B, C et D qui touchent à la fois la courbe et un cycle donné, et soient C′ et D′ les tangentes conjuguées de deux quelconques d'entre elles, C et D; les quatre semi-droites A, B, C′ et D′ sont également tangentes à un même cycle.

» Soient A et B deux tangentes fixes de la courbe; inscrivons un cycle quelconque K dans ces semi-droites et soient C et D les deux autres tangentes communes au cycle et à l'hypercycle. Il résulte de la proposition précédente qu'en désignant par C′ et D′ les conjuguées de C et D, C′ et D′ sont tangentes à un cycle K′ inscrit dans A et B. Le cycle moyen K_0 des deux cycles K et K′ est fixe, quel que soit le cycle K que l'on considère, et il est complètement déterminé quand on se donne les deux tangentes A et B; c'est le cycle inscrit dans A et B et qui touche deux tangentes conjuguées (dans le cas où A et B sont elles-mêmes conjuguées, c'est le cycle qui touche ces tangentes et les semi-droites fondamentales); si les deux tangentes A et B viennent se confondre, le cycle moyen K_0 correspondant est le cycle polaire de la tangente.

» Il résulte de là que la courbe est entièrement définie quand on se donne deux tangentes quelconques A et B, le cycle moyen correspondant K_0 et les deux semi-droites fondamentales. Il est facile en effet de construire les tangentes communes à l'hypercycle et à un cycle quelconque K inscrit dans A et B; que l'on construise le cycle K′ symétrique

du cycle K relativement au cycle K_0. L'enveloppe des conjuguées harmoniques des tangentes à K′ relativement aux semi-droites fondamentales est un cycle K″ et les deux tangentes communes à K et à K″ seront les droites cherchées.

» De là résulte en particulier un moyen facile de construire le cercle osculateur en un point a de la courbe. A désignant la tangente en ce point, construisons la tangente conjuguée A′, puis le centre G du cercle qui touche A′ et la courbe au point a; cela posé, α désignant le centre du cycle polaire de la tangente A, le centre du cercle osculateur cherché est le symétrique du point G relativement à α. Un hypercycle a un seul foyer F qui est un foyer singulier; la somme des distances du foyer à deux tangentes conjuguées quelconques est constante.

» 15. Le cas particulier où les semi-droites A et B sont opposées mérite un examen particulier. L'hypercycle peut être défini comme une courbe de quatrième classe et du sixième ordre ayant trois tangentes doubles dont l'une est la droite de l'infini et passant par les ombilics du plan. Les tangentes doubles sont des *tangentes doubles apparentes;* car, aux points de contact, la courbe a des directions opposées; en réalité, on doit les considérer comme des tangentes distinctes, mais opposées.

» Les quatre points doubles de la courbe déterminent trois couples de droites correspondant respectivement aux tangentes doubles; les deux droites dont l'ensemble correspond à la droite de l'infini sont les *axes* de la courbe et se croisent au point O, qui est l'intersection des semi-droites fondamentales, lesquelles passent d'ailleurs par les points de contact de la droite de l'infini avec l'hypercycle.

» Soient A et B les deux autres tangentes doubles de la courbe et R leur point de rencontre; la droite menée par le point O perpendiculairement à la bissectrice des semi-droites fondamentales (j'entends par là le lieu des centres des cycles inscrits dans ces deux semi-droites) rencontre respectivement A et B en deux points a et b dont le milieu est précisément le point O. Désignons par α et β les milieux des segments Ra et Rb, nous pourrons énoncer la propriété suivante : Si une tangente à la courbe coupe A et B aux points α_1 et β_1 et si nous déterminons les points α_2 et β_2 qui sont respectivement les symétriques de α_1 et β_1 relativement à α et β, la semi-droite $\alpha_2\,\beta_2$ est tangente à la courbe et est la conjuguée de la tangente $\alpha_1\beta_1$.

» La tangente double A rencontre la courbe en deux points distincts des points de contact; ces points sont équidistants du point α et les tan-

gentes sont conjuguées. Une propriété analogue a lieu relativement à la tangente double B.

» La courbe est entièrement déterminée quand on se donne les deux semi-droites fondamentales, une des tangentes doubles A et le point α; on peut énoncer en effet la proposition suivante :

» Inscrivons dans les deux semi-droites fondamentales un cycle quelconque K; désignons par a' le point où la corde de contact coupe la tangente double A, par a le point symétrique du point a' relativement au point α. Cela posé, les tangentes menées du point a à la courbe sont parallèles aux tangentes que l'on mène du point α au cycle K.

» Cette construction permet de déterminer facilement les tangentes parallèles à une direction donnée ou émanant d'un point quelconque de la tangente double, et par suite tous les éléments importants de la courbe.

» 16. Avant d'exposer de nouvelles propriétés de l'hypercycle, je rappellerai d'abord quelques notions fondamentales relativement à la transformation par semi-droites réciproques.

» Cette transformation est complètement définie par les propriétés suivantes :

» Deux semi-droites réciproques se coupent sur une droite fixe Δ que l'on peut appeler *axe de transformation*; deux *couples* quelconques de semi-droites réciproques sont tangents à un même cycle.

» J'ajouterai que deux couples de semi-droites harmoniques ont pour réciproques deux couples de semi-droites harmoniques et que la distance tangentielle de deux cycles est égale à la distance tangentielle des cycles réciproques; j'entends ici par distance tangentielle de deux cycles la longueur comprise sur l'une quelconque des deux tangentes communes entre leurs points de contact.

» Cela posé, il résulte de la définition même des hypercycles que ces courbes ont pour transformées par semi-droites réciproques d'autres hypercycles; les semi-droites fondamentales de la transformée étant les transformées des semi-droites fondamentales de la courbe donnée.

» Aux tangentes conjuguées de cette courbe correspondent les tangentes conjuguées de la transformée, etc., etc. Je ferai remarquer à ce sujet qu'une tangente double de la proposée étant une tangente double apparente a pour transformées deux tangentes ordinaires de la transformée.

» Considérons un cycle quelconque K inscrit dans les deux semi-droites fondamentales; il a en commun avec la courbe quatre tangentes qui se coupent deux à deux sur l'un des axes $O\omega_0$. Effectuons une transformation

par semi-droites réciproques, de telle sorte que ce cycle se transforme en un point : les quatre tangentes auront pour transformées deux couples de semi-droites opposées; de telle sorte que, relativement à la courbe transformée, deux couples de tangentes conjuguées se composeront de semi-droites opposées.

» Si l'on coupe ces tangentes par une tangente quelconque coupant ces deux couples aux points α, α' et β, β', on a, d'après une propriété générale énoncée plus haut,

$$\alpha a + \alpha' a + b\beta + b\beta' - \alpha\beta - \alpha\beta' = \text{const.}$$

Or, dans ce cas particulier, les points α et β se confondent, ainsi que les points α' et β'; αa est opposée à $b\beta$ et $\alpha' a$ à $b\beta'$; on a donc $\alpha\beta = \alpha'\beta' = 0$, $b\beta = \alpha a$ et $b\beta' = \alpha' a$, et par suite

$$\alpha a + \alpha' a = \text{const.},$$

d'où il suit que la courbe transformée est une parabole.

» Ainsi (si l'on admet des transformations imaginaires), tout hypercycle, sauf un cas particulier que j'examinerai plus loin, est la transformée par semi-droites réciproques d'une parabole. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'intégration, par les fonctions abéliennes, de certaines équations aux dérivées partielles du premier ordre.* Note de M. E. **Picard**, présentée par M. Hermite.

« MM. Briot et Bouquet ont, comme on sait, dans leur mémorable Mémoire sur l'intégration par les fonctions elliptiques, étudié les équations différentielles de la forme

$$f\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0,$$

et ont notamment considéré le cas où cette équation admet comme intégrales des fonctions doublement périodiques de la variable z.

» Une question analogue peut se poser pour les équations aux dérivées partielles de la forme

$$(\text{I}) \qquad f\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

où f est, bien entendu, un polynôme : je veux parler du cas où cette équation admettrait comme intégrales des fonctions abéliennes des deux variables x et y.

» Sans résoudre complètement ce difficile problème, les considérations qui suivent me semblent faire faire à la question un pas important; je me propose d'indiquer brièvement comment on peut, de la seule équation (I), déduire un système de deux équations aux différentielles totales, donnant, s'il est possible, les solutions cherchées.

» Rappelons d'abord que, u, v et w étant trois fonctions abéliennes des deux variables x et y, et l'équation

$$\text{(II)} \qquad f(u, v, w) = 0$$

étant la relation algébrique entre ces trois fonctions, le genre de la relation (II) est au plus égal à l'unité; c'est ce que j'ai montré dans une étude récente (*Mathematische Annalen*, XIX Bd.). Plaçons-nous dans le cas où ce genre serait égal à l'unité; il résulte encore du travail cité que l'on pourra trouver alors un polynôme $Q(u, v, w)$ tel que l'expression

$$\frac{Q(u, v, w)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{f'_w(u, v, w)}$$

se réduise à une constante, et l'on peut considérer le polynôme Q comme connu quand la relation (II) est donnée.

» Posons maintenant $v = \frac{\partial u}{\partial x}$ et $w = \frac{\partial u}{\partial y}$; nous aurons les deux équations

$$f\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

$$\frac{Q(u, v, w)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, w - v\, \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\right)}{f'_w(u, v, w)} = a,$$

a étant une constante. En différentiant la première de ces équations successivement par rapport à x et à y, et y joignant la seconde, nous pouvons exprimer les dérivées secondes $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ en fonctions rationnelles de u, v, w. Or on a

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy,$$

$$dv = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\, dy,$$

et par suite, en résolvant par rapport à dx et dy et remplaçant les dérivées partielles par leur expression en u, v et w, on obtient le système

d'équations aux différentielles totales :

$$dx = P(u, v, w)\,du + R(u, v, w)\,dv,$$
$$dy = P_1(u, v, w)\,du + R_1(u, v, w)\,dv,$$

où les P et les R sont rationnelles et w est lié à u et à v par la relation algébrique

$$f(u, v, w) = 0.$$

» Le système d'équations aux différentielles totales donnant u et v en fonction de x et y est ainsi complètement déterminé. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les fonctions fuchsiennes.* Note de M. **H. Poincaré**, présentée par M. Hermite.

« Je voudrais exposer ici quelques résultats nouveaux et les réunir à des théorèmes anciens, de façon à en faire un ensemble comprenant, comme cas particuliers, les résultats obtenus par M. Klein par d'autres considérations, et exposés par lui dans deux Notes récentes (*Math. Ann.*, Bd. XIX et XX).

» Soit une équation différentielle linéaire quelconque

$$(1) \qquad \frac{d^n v}{dx} + P_{n-2}\frac{d^{n-2} v}{dx^{n-2}} + P_{n-3}\frac{d^{n-3} v}{dx^{n-3}} + \ldots + P_1\frac{dv}{dx} + P_0 v = 0.$$

» Dans cette équation, $P_0, P_1, \ldots P_{n-2}$ sont des fonctions rationnelles en x et en y, et y est lié à x par une relation algébrique

$$(2) \qquad f(x, y) = 0.$$

» D'ailleurs, une ou plusieurs des fonctions P deviendront infinies pour certaines positions du point analytique (x, y) : ce seront les points singuliers de notre équation différentielle ; à chacun d'eux correspondra une équation déterminante dont les racines pourront être imaginaires ou incommensurables, ou bien être toutes des multiples de $\frac{1}{n}$, n étant un entier positif. Dans ce dernier cas, nous dirons que le point singulier est de la première catégorie ; dans le cas contraire, qu'il est de la seconde catégorie. Je laisse de côté le cas où plusieurs des racines sont égales, et qui correspond soit à un point de la seconde catégorie, soit à un point à apparence singulière.

» Il existera, en général, deux fonctions fuchsiennes $F(z)$ et $F_1(z)$, jouissant des propriétés suivantes :

» 1° Elles n'existent qu'à l'intérieur du cercle fondamental.

» 2° Si l'on fait $x = F(z)$, $y = F_1(z)$, la relation (2) est satisfaite.

» 3° Quand z reste intérieur au cercle fondamental, le point analytique (x, y) ne peut passer par aucun point singulier de la seconde catégorie.

» 4° Si (x, y) passe par un point singulier de la première catégorie, $F(z)$ et $F_1(z)$ ont leurs $n-1$ premières dérivées nulles.

» Alors les intégrales de l'équation (1) sont des fonctions zétafuchsiennes de z.

» Supposons, en particulier, qu'il n'y ait pas de points singuliers de la première ni de la seconde catégorie, et que la relation (2) soit de genre p; le polygone R_0 correspondant à nos fonctions fuchsiennes pourra être amené à l'une des deux formes suivantes :

» 1° Ou bien un polygone de $4p$ côtés dont les côtés opposés sont conjugués, et dont tous les sommets forment un seul cycle, de telle façon que la somme des angles soit égale à 2π;

» 2° Ou bien un polygone de $4p$ côtés dont les côtés de rang $4q+1$ et $4q+3$ sont conjugués, ainsi que les côtés de rang $4q+2$ et $4q+4$ (q étant un entier). Ici encore tous les sommets ne forment qu'un cycle, et la somme des angles est égale à 2π. Cette forme de R_0 présente cet avantage que les différents côtés correspondent alors aux périodes *normales* des intégrales abéliennes de première espèce, et que la considération de ces fonctions fuchsiennes permet alors de présenter d'une façon simple la démonstration des relations entre ces périodes.

» Le polygone R_0 peut encore prendre une infinité d'autres formes se ramenant les unes aux autres. Je citerai, entre autres, dans le cas $p = 3$, le polygone de 14 côtés considéré par M. Klein.

» Si $p = 1$, nos fonctions F et F_1 se réduisent à des fonctions doublement périodiques, de sorte que l'on retrouve les résultats connus sur l'intégration des équations linéaires par ces sortes de fonctions, et en particulier ceux de M. Picard.

» On peut retrouver de même les résultats connus relativement à l'intégration algébrique de ces équations. Si ces équations admettent, en effet, des intégrales algébriques, les séries thétazétas, par lesquelles s'expriment nos fonctions zétafuchsiennes, se réduisent d'elles-mêmes à des séries thétafuchsiennes ; par conséquent, les intégrales v se ramènent à des fonctions fuchsiennes de z liées à x par des relations algébriques, puisque nous savons

qu'il y a toujours une telle relation entre deux fonctions fuchsiennes de même groupe.

» Supposons maintenant que notre équation (1) admette des points singuliers; les sommets de R_0 se répartiront alors non plus en un, mais en plusieurs cycles, qui sont de la première ou de la seconde catégorie, selon que les points singuliers correspondants sont de la première ou de la seconde catégorie.

» Est-ce là la seule manière d'exprimer x, y et v par des fonctions uniformes de z? Non.

» 1° On peut remplacer $F(z)$ et $F_1(z)$ par deux fonctions $F'(z)$ et $F'_1(z)$, jouissant des mêmes propriétés, mais qui sont des fonctions kleinéennes, ou de ces fonctions fuchsiennes qui n'existent que dans une partie du cercle fondamental. Le passage de $F(z)$ à $F'(z)$ se fera par l'*Abbildung* du cercle fondamental sur un certain domaine.

» 2° On peut égaler z à une fonction uniforme de t, et alors x, y et v sont également uniformes en t; de plus, on pourra choisir d'une infinité de manières z en fonction de t, de telle sorte que

$$x = \mathfrak{F}(t), \quad y = \mathfrak{F}_1(t), \quad v = Z(t),$$

$\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}_1$ étant des fonctions fuchsiennes et Z une fonction zétafuchsienne. Il est quelquefois plus facile de trouver la fonction $\mathfrak{F}(t)$ que $F(z)$, comme j'en ai donné l'exemple dans ma Communication du 8 août 1881.

» On peut enfin exprimer x et y par des fonctions fuchsiennes $F(z)$ et $F_1(z)$ existant dans toute l'étendue du plan; mais je ne puis entrer ici dans tous les détails que ce sujet comporte. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable;* par M. **Mittag-Leffler**. (Extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite.)

« Mon théorème paru dans les *Comptes rendus* du 18 février peut être modifié d'une manière qui me paraît être d'une certaine importance pour l'étude des nouvelles fonctions que M. Poincaré a introduites dans l'Analyse.

» Je suppose données :

» 1° Une suite infinie de valeurs $a_1, a_2, a_3, \ldots$, toutes inégales et assujetties à la condition

$$\lim_{\nu=\infty} \operatorname{mod} a_\nu = R,$$

où R est une quantité positive quelconque;

» 2° Une suite de fonctions entières algébriques ou transcendantes de la variable y, s'annulant toutes pour $y = 0$,

$$G_1(y) = c_{-1}^{(1)} y + c_{-2}^{(1)} y^2 + c_{-3}^{(1)} y^3 + \ldots,$$
$$G_2(y) = c_{-1}^{(2)} y + c_{-2}^{(2)} y^2 + c_{-3}^{(2)} y^3 + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

» Il est alors toujours possible de former une fonction analytique $F(x)$, ayant le caractère d'être une fonction uniforme de x, tant que x ne surpasse pas le domaine $\operatorname{mod} x < R$, n'ayant dans ce domaine d'autres points singuliers que $a_1, a_2, a_3, \ldots$, et telle que pour chaque valeur déterminée de ν la différence

$$F(x) - G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right)$$

ait, en supposant $x = a_\nu$, une valeur finie et déterminée, de telle sorte que, dans le voisinage de $x = a_\nu$, $F(x)$ puisse s'exprimer sous la forme

$$G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right) + \mathfrak{P}(x - a_\nu).$$

» La fonction $F(x)$ peut être formée de la même manière que dans ma Note du 13 février. Prenez arbitrairement une suite infinie de nombres positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$, dont la somme soit finie, ainsi qu'un autre nombre positif ε qui sera supposé < 1. En ayant maintenant $a_\nu = 0$, vous ferez

$$F_\nu(x) = G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right).$$

» Si a_ν est différent de zéro, vous développez $G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right)$ en une suite de puissances entières et positives de x : $\sum_\rho^{\infty} A_\rho^{(\nu)} \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\rho$, qui restera évidemment convergente tant que vous aurez $\operatorname{mod} \frac{x}{a_\nu} < \varepsilon$. Après avoir trouvé ce nombre m_ν, vous mettez

$$F_\nu(x) = G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right) - \sum_\rho^{\infty} A_\rho^{(\nu)} \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\rho,$$

et vous aurez

$$F(x) = \sum_\nu^{\infty} F_\nu(x).$$

» Il reste maintenant à déterminer la forme de la fonction la plus géné-

rale $F(x)$ qui a les mêmes qualités attribuées à $F(x)$. Vous voyez facilement qu'on aura

$$\bar{F}(x) = F(x) + G(x),$$

où $G(x)$ est une série de puissances entières et positives de x qui reste toujours convergente dans le domaine $\mathrm{mod}\, x < R$.

» Il peut arriver qu'il y ait, sur chaque portion de la ligne $\mathrm{mod}\, x = R$, un nombre infini de points singuliers de $\bar{F}(x)$. Dans ce cas, la fonction existe seulement dans le domaine $\mathrm{mod}\, x < R$. Si ce cas n'a pas lieu, le domaine de la fonction $\bar{F}(x)$ peut être étendu au delà du domaine $\mathrm{mod}\, x < R$.

» Une question importante que je ne traiterai pas maintenant est la suivante. Soit $F(x)$ une fonction donnée. Y a-t-il alors toujours une méthode simple et directe pour déterminer $G(x)$? Quoiqu'il ne soit guère possible de trouver une telle méthode qui embrasse le cas général, il est pourtant facile, maintenant comme précédemment, pour $R = \infty$, d'indiquer des méthodes qui suffisent pour des classes étendues de fonctions.

» Je me permettrai encore seulement la remarque suivante. On voit sans peine que l'on peut donner au théorème que j'ai obtenu la même extension qu'au théorème donné dans les *Comptes rendus* du 3 avril. On voit aussi qu'au lieu du domaine $\mathrm{mod}\, x \leqq R$ on peut mettre un domaine limité d'une manière quelconque. »

GÉOMÉTRIE. — *Sur l'inversion générale.* Note de M. **J.-S. Vaněček**, présentée par M. de la Gournerie.

« 1. M. Hirst, dans son Mémoire *On the quadric inversion of plane curves,* a généralisé la théorie de transformation par rayons vecteurs réciproques de telle sorte, qu'il a pris une conique générale C et un point d pour éléments de la transformation. Par ce point d, on mène un rayon à chaque point a de la figure proposée, et l'on prend sur ce rayon le point a' conjugué de a par rapport à la conique. Ces points a' forment la nouvelle figure. Nous allons donner, dans cette Note, l'idée d'une transformation plus générale.

» 2. Considérons une conique C, que nous appelons *fondamentale,* et une droite D dans le plan de la conique C. La droite D est la *directrice* de la transformation. Supposons que la figure proposée soit une droite L. La polaire A d'un point a de la droite L, par rapport à la conique C, coupe la directrice D en un point a_1, dont la polaire A_1 passe par le pôle d de

la droite D et par a. Le point d'intrsection a_2 de ces deux polaires est le transformé du point a. La transformée de la droite L est une conique (a_2), qui passe par les points d'intersection des droites D, L avec la conique fondamentale C et par les pôles de ces deux droites.

» 3. Le point a_2 est le point d'intersection de deux polaires conjuguées A, A_1. Alors nous trouvons la conique (a_2) quand nous transformons les points de la droite L par rapport à la conique C et à la directrice D, ou réciproquement les points de la droite D par rapport à la conique C et à la droite L. Les droites D, L changent par conséquent leurs fonctions. Nous appelons la conique (a_2) l'*inverse* de la droite L par rapport à la conique C et à la droite D.

» 4. La transformée de la droite J de l'infini est une conique I semblable et semblablement placée avec la conique fondamentale C qui passe par son centre c, par les points d'intersection m_1, m_2 de la droite D avec la conique C et par le pôle d de la droite D.

» Une conique L coupe la conique I en quatre points, et ces points se transforment en quatre points à l'infini; la courbe inverse (a_2) de la conique L est par suite du quatrième ordre. Nous pouvons donc dire qu'une conique L, par rapport à une directrice droite D, a pour courbe inverse une courbe (a_2) du quatrième ordre, ou, à cause de l'inversion de la droite D et de la conique L, que la droite D, par rapport à une conique directrice L, se transforme en une courbe (a_2) du quatrième ordre.

» Généralement une courbe L de l'ordre m, par rapport à une conique fondamentale C et à une courbe directrice D du $n^{\text{ième}}$ ordre, se transforme en une autre courbe (a_2) de l'ordre $2mn$.

» 5. Nous trouverons comme suit les points multiples de la courbe précédente (a_2). La polaire A d'un point d'intersection a de la courbe L avec la conique fondamentale passe par ce point et coupe la courbe D en général en n points. Les droites polaires de ces n points passent toutes par le point a; par conséquent, ce point est un point multiple de l'ordre n. Le nombre de tels points est $2m$. Par le même raisonnement, nous voyons que les points d'intersection de la conique fondamentale avec la courbe D, qui est de l'ordre n, sont des points multiples de l'ordre m. Le nombre de ces points est $2n$.

» Supposons que n_1 points $a, b, c, \ldots$ de la courbe proposée L se trouvent sur une certaine droite, ainsi que leurs points correspondants $a_1, b_1, c_1, \ldots$ de la courbe D : parce que les points $a, b, c, \ldots; a_1, b_1, c_1, \ldots$ sont situés sur une droite, leurs droites polaires passent par son pôle p par

rapport à la conique fondamentale. Par conséquent, le point p est un point multiple d'ordre n_1 de la courbe inverse.

» Quand la courbe proposée devient une droite L, la droite P coïncide avec cette ligne et nous avons toujours un seul point l, qui est son pôle par rapport à la conique fondamentale C et l'origine de la transformation de M. Hirst.

» 6. Chaque point a de la courbe proposée L a une polaire A qui coupe la courbe directrice D, en général, en n points, dont les polaires coupent la droite A de même en n points. Quand la droite A touche la courbe D, deux des points d'intersection se réunissent et la même circonstance se présente aux points dérivés qui donnent un point d'inflexion. La droite A dans sa position singulière touche la courbe D et la courbe polaire L_1 de L. La courbe L_1 est de la $m^{\text{ième}}$ classe, la courbe L étant du $m^{\text{ième}}$ ordre. La courbe directrice D étant d'ordre n est en général de la classe $n(n-1)$. Les deux courbes L_1, D ont $mn(n-1)$ tangentes communes. De même, les courbes L et D_1 ont $mn(m-1)$ tangentes communes. Le nombre de ces tangentes ou des points d'inflexion est par conséquent, en général, $mn(m+n-2)$.

» Il est clair que ces points singuliers peuvent être deux à deux imaginaires et que ce ne sont pas tous les points d'inflexion dont est douée la courbe inverse. »

MÉCANIQUE. — *Résistance d'une barre prismatique et homogène, de longueur supposée infinie, au choc transversal et au choc longitudinal.* Note de M. J. **Boussinesq**, présentée par M. de Saint-Venant.

« Lorsqu'un corps heurte avec une certaine vitesse V et sur une petite étendue une barre de longueur infinie, soit transversalement en son milieu, soit longitudinalement à son extrémité, et de manière à n'être pas dévié, son mouvement, se communiquant à une partie de plus en plus longue de la barre, est absorbé peu à peu, et le corps arrive insensiblement au repos sans rebondir. Il ne quitte donc pas la barre, et l'on peut raisonner comme s'il lui était uni et que sa vitesse initiale lui eût été communiquée par une impulsion extérieure. Le problème du choc sera donc compris dans celui du mouvement d'une barre qui, s'étendant, le long de l'axe des x, depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, porterait à l'origine $x=0$ une certaine masse étrangère, et y recevrait, après s'être trouvée primitivement en repos, des

impulsions successives capables d'imprimer à cette masse étrangère, pour le cas où elle serait seule, des accélérations données $F(t)$.

» Traitons d'abord ce second problème, en supposant le mouvement transversal et la section de la barre symétrique par rapport à un plan perpendiculaire à ce mouvement. Le déplacement φ y vérifiera : 1° l'équation indéfinie $\varphi''_t + a^2 \varphi^{\text{IV}}_x = 0$, où a est le produit de la vitesse ω du son le long de la barre par la demi-épaisseur h de celle-ci et par l'inverse d'un certain nombre, k, dépendant de la forme de sa section, nombre égal à 2 quand elle est ronde ou elliptique, à $\sqrt{3}$ quand elle est rectangulaire, et toujours supérieur à l'unité, dont il ne s'approche que pour certaines sections très évidées; 2° les conditions spéciales $\varphi = 0$ pour $t = -\infty$, $\varphi = 0$ pour x infini, $\varphi'_x = 0$ pour $x = 0$ et $\mu\varphi''_t + a^2 \varphi'''_x = \mu F(t)$ pour $x = 0$, μ désignant la masse étrangère, rapportée à celle de l'unité de longueur de la barre. La méthode d'intégration indiquée dans ma Note du 2 janvier (*Comptes rendus*, p. 33) donne aisément

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi = \int_0^\infty \left[f\left(at - \frac{\alpha^2}{2}\right)\left(\cos\frac{x^2}{2\alpha^2} + \sin\frac{x^2}{2\alpha^2}\right) - \mu f\left(at - \frac{x^2}{2\alpha^2}\right)\sin\frac{\alpha^2}{2}\right] d\alpha,\\ &\text{où}\\ &f(at) = \frac{\mu}{a\sqrt{\pi}}\left[\int_{-\infty}^t F(\theta)\,d\theta + \int_t^\infty e^{2a\frac{t-\theta}{\mu^2}} F(\theta)\,d\theta\right]. \end{aligned}\right.$$

» Pour l'endroit $x = 0$, où sont exercées les impulsions et qui est évidemment le plus exposé à la rupture, on déduit, de la première (1),

$$\varphi'_t = -a\varphi''_x,$$

ou

$$(\text{en valeur absolue})\ \omega h \varphi''_x = k\varphi'_t,$$

relation que l'on obtiendrait, du reste, dans tous les problèmes analogues impliquant, pour $x = 0$, l'une des deux conditions $\varphi'_x = 0$, $\varphi'''_x = 0$. Or, le produit de la courbure $-\varphi''_x$ par la demi-épaisseur h exprime la *dilatation dangereuse* ∂, c'est-à-dire celle de la fibre la plus étendue, et, d'autre part, la dérivée φ'_t est la vitesse v imprimée à la barre. On a donc $\omega\partial = kv$. Ainsi, *quand une barre est assez longue pour que ses extrémités restent sensiblement en repos tandis qu'on exerce en un de ses points des impulsions transversales quelconques, la plus grande vitesse qu'elle puisse prendre en ce point, sans altération de sa contexture, est une fraction de la vitesse du son (le long de la même barre) exprimée par le quotient de la limite d'élasticité* ∂ *de sa matière et d'un nombre, k, dépendant seulement de la forme de sa section.*

» Si la masse étrangère μ est venue, à l'époque $t = 0$, heurter la barre avec une vitesse V, $F(\theta)$ n'a de valeurs sensibles que dans le voisinage de $\theta = 0$ et $\int F(\theta)\,d\theta$, entre les limites $\pm\infty$, égale V. Il vient donc

$$(2)\qquad f(at) = \frac{\mu V}{a\sqrt{\pi}} e^{\frac{2at}{\mu^2}} \text{ (pour } t < 0\text{)},\quad f(at) = \frac{\mu V}{a\sqrt{\pi}} \text{ (pour } t > 0\text{)}.$$

» Mais on prouve que l'expression (1) de φ n'est pas changée par l'addition, à $f(at)$, d'un terme de la forme $Ke^{\frac{2at}{\mu^2}}$, de sorte qu'on peut retrancher de ces deux valeurs l'exponentielle qui constitue la première, et avoir ainsi $f(at) = 0$ pour $t < 0$. Alors la formule (1) donne $\varphi = 0$ pour $t < 0$, et si, pour $t > 0$, l'on se borne à chercher le déplacement du point heurté, il vient

$$(3)\qquad \text{(pour } x = 0\text{)}\quad \varphi = \frac{\mu^2 V}{a\sqrt{\pi}}\left[\sqrt{\frac{2at}{\mu^2}} + \psi\left(\frac{2at}{\mu^2}\right) - \psi(0)\right],$$

où $\psi(\gamma)$ représente la fonction $\int_{\sqrt{\gamma}}^{\infty} e^{\gamma-u^2}\,du$, ou $\frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-u}\frac{du}{\sqrt{\gamma+u}}$, qui, égale à $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ pour $\gamma = 0$ et sans cesse décroissante quand γ grandit, tend, pour γ très grand, vers la forme $\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}$, tout en restant au-dessous. Une différentiation donne ensuite, pour la vitesse, à l'époque t, de la partie heurtée et de la masse μ, $\varphi'_t = V\frac{2}{\sqrt{\pi}}\psi\left(\frac{2at}{\mu^2}\right)$. Comme on pouvait le prévoir, cette vitesse, d'abord égale à V, décroît sans cesse, en tendant vers zéro pour $t = \infty$.

» Les cas d'impulsions longitudinales ou d'un choc longitudinal, sur l'extrémité d'une barre s'étendant de $x = 0$ à $x = \infty$, sont beaucoup plus simples; car, alors, l'équation indéfinie $\varphi''_t = \omega^2\varphi''_x$, combinée avec les relations $\varphi = 0$ pour $t = -\infty$ et $\varphi = 0$ pour $x = \infty$, donne $\varphi = f(\omega t - x)$, $f(\omega t)$ étant une fonction arbitraire que la condition spéciale à $x = 0$, $\mu\varphi''_t - \omega^2\varphi'_x = \mu F(t)$, oblige de prendre égale à $\frac{\mu}{\omega}\int_{-\infty}^{t}\left(1 - e^{\omega\frac{\theta - t}{\mu}}\right)F(\theta)\,d\theta$. S'il s'agit d'un simple choc, opéré à l'époque $t = 0$ avec la vitesse V, il vient $f(\omega t) = 0$ (pour $t < 0$) et $f(\omega t) = \frac{\mu V}{\omega}\left(1 - e^{-\frac{\omega t}{\mu}}\right)$ (pour $t > 0$); d'où résulte, au point heurté, une vitesse v nulle pour $t < 0$ et égale à $Ve^{-\frac{\omega t}{\mu}}$ pour $t > 0$. D'ailleurs, la formule $\varphi = f(\omega t - x)$ donne $\varphi'_t = -\omega\varphi'_x$, ou $v = -\omega\delta$, si δ est la dilatation produite. *La plus grande vitesse transmise à la barre par les impulsions longitudinales exercées ne devra donc pas dépasser*

une fraction de la vitesse de son égale à la limite d'élasticité δ, *sans quoi il y aura altération de la contexture.*

» Cette loi a été énoncée par Thomas Young au commencement de ce siècle. La présente Note établit, comme on voit, son extension, pour le point heurté, au cas d'impulsions transversales, à un facteur numérique près; et elle montre que *la vitesse d'un choc transversal capable d'altérer la contexture est plus petite que celle d'un choc longitudinal, produisant le même effet par extension, dans le rapport de* 1 *à* k, *c'est-à-dire de* 1 *à* 2 *si la barre est ronde, de* 1 *à* $\sqrt{3}$ *si elle est rectangulaire et heurtée perpendiculairement à une de ses faces, etc.*

» Les lois démontrées ici pour les chocs opérés sur des barres de longueur infinie s'étendent, d'ailleurs, au cas de barres d'une longueur quelconque et même très restreinte, à condition de ne les y appliquer que pour cette première période du choc où les ébranlements ne sont pas encore parvenus aux extrémités non heurtées des barres; et elles permettent de prévoir que la rupture, si elle se produit dans cette première période, se fera nettement à l'endroit heurté et quelle que soit la masse heurtante, pourvu que sa vitesse dépasse une certaine limite. »

PHYSIQUE. — *Recherches expérimentales sur la conductibilité thermique des minéraux et des roches*; par M. J. **Thoulet**.

« Dans les considérations auxquelles on peut se livrer pour arriver à la connaissance du mode de formation des minéraux et des roches, une des données les plus importantes est celle de la température à laquelle peuvent être amenés par convection ces minéraux ou ces roches. La détermination des coefficients de conductibilité a été faite, en général, par l'observation de l'état de température dit *stationnaire*; mais on y parvient aussi en s'appuyant sur l'état variable.

» Je nomme *résistance thermique* le *temps* nécessaire pour qu'une quantité de chaleur constante, qui, dans mes expériences, est de 34° C., partant d'une source à 100° en contact avec la surface inférieure plane d'une roche, parvienne à la surface supérieure de cette roche, distante de la première de $0^{m},010$. On verra que cette résistance thermique est fonction du coefficient de conductibilité, tel qu'il a été défini par les travaux de Fourier et de Lamé, et qu'elle permet d'en déterminer la valeur.

» La mesure des résistances thermiques du verre, du fer et de l'anhydrite, et par conséquent celle du coefficient de conductibilité de ces corps, se fait en déposant, sur un bloc de fer chauffé à des températures variant de 100° à 160°, mais fixes pour une même série d'expériences, des plaques minérales d'épaisseurs diverses, variant de $0^m,015$ à $0^m,007$. Ces plaques, revêtues de lames minces de papier d'étain et avec certaines dispositions expérimentales, supportent des index fusibles, les uns à 50° (stéarine), les autres à 84° (cire de Carnauba). On note le temps qui s'écoule entre la fusion des premiers et celle des seconds, et l'on construit la courbe en prenant pour abscisses les températures de la source et pour ordonnées les temps mesurés à l'aide d'un compteur à pointage. J'ai construit de cette façon, pour chacun des trois corps étudiés jusqu'à présent, trois courbes qui, d'après les recherches de M. Lagarde, sont des hyperboles équilatères. On trace alors une seconde série de courbes, en prenant pour abscisses chacune des trois épaisseurs de la roche en expérience et pour ordonnées celles qui sont relatives aux courbes températures-temps précédemment trouvées. La résistance thermique est alors donnée graphiquement par la longueur de l'ordonnée ayant pour abscisse l'épaisseur 10 et rencontrant l'isotherme relative à la température 100. Cette courbe est une hyperbole non équilatère.

» Les résultats obtenus ont été les suivants :

	Résistance thermique.	Coefficient de conductibilité.
Verre...............	122,4	2,66
Fer forgé............	42,3	10,26
Anhydrite............	56,4	4,56

» La nouveauté de cette méthode consiste dans la substitution de l'évaluation précise des temps à la détermination des températures. »

PHYSIQUE. — *De l'évaluation de la conductibilité thermique par la mesure des temps pendant l'état variable;* par M. H. Lagarde.

« Les expériences de M. Thoulet sur le fer, le verre et l'anhydrite, montrent que, si l'on fait passer la surface supérieure d'une plaque d'épaisseur l d'une température θ_1 à une température θ_2, il existe une relation facile à établir expérimentalement entre les temps et les températures initiales a. Pour déterminer la nature de cette relation, considérons l'équation aux

différentielles partielles relative à l'état variable ([1])

$$\frac{du}{dt} = \gamma^2 \frac{d^2 u}{dx^2}.$$

» Si l'on pose $u = b - \frac{b-a}{l} x + z$, de sorte que pour $x = l$, $z = 0$, on a à intégrer

$$\frac{dz}{dt} = \gamma^2 \frac{d^2 z}{dx^2}.$$

» En prenant $z = e^{mx+n^2 t}$ et en satisfaisant à la condition que, pour $x = l$, $z = 0$, on a une intégrale particulière de la forme

$$z = \frac{C e^{n^2 t}}{e^{-\frac{nl}{\gamma}}} \left[e^{-\frac{nl}{\gamma}} e^{\frac{n}{\gamma} x} - e^{\frac{nl}{\gamma}} e^{-\frac{n}{\gamma} x} \right].$$

» g étant la température de l'étuve, liée à a, dans les limites de température où l'on opère, par la relation $g = pa + q$, la valeur de u doit satisfaire à la relation relative à la surface supérieure

$$\left[\gamma^2 \frac{du}{dx} - \delta^2 (u - g) = \frac{du}{dt} \right]^{x=0},$$

d'où, pour z,

$$\left[\gamma^2 \frac{dz}{dx} + \delta^2 \frac{b-a}{l} x - \delta^2 z = \frac{dz}{dt} \right]^{x=0},$$

en annulant le terme tout connu, ce qui détermine la valeur de b. En substituant et en effectuant les réductions, on obtient la relation

$$e^{\frac{nl}{\gamma}} (n\gamma + \delta^2 + n^2) = e^{-\frac{nl}{\gamma}} (\delta^2 + n^2 - n\gamma).$$

» En limitant au troisième terme les développements des exponentielles, approximation légitimée par l'expérience, on en tire

$$n^2 = -\frac{2}{l} \frac{(\gamma^2 + l\delta^2)}{(l+2)}.$$

» L'intégrale générale de la forme

$$z = \sum \frac{c e^{n^2 t}}{e^{-\frac{nl}{\gamma}}} \left[e^{-\frac{nl}{\gamma}} e^{\frac{n}{\gamma} x} - e^{\frac{nl}{\gamma}} e^{-\frac{n}{\gamma} x} \right]$$

---

(1) Verdet, *Conférences de Physique à l'École Normale*, 1re Partie, p. 42.

devient, dans ces conditions,

$$z = c^{n^2 t} \sum \frac{c}{e^{-\frac{nl}{\gamma}}} \left[e^{-\frac{nl}{\gamma}} e^{\frac{n}{\gamma}x} - e^{\frac{nl}{\gamma}} e^{-\frac{n}{\gamma}x} \right].$$

Si l'on fait

$$x = 0,\ t = 0,\ u = \theta_1,\ z = \theta_1 - b \quad \text{et} \quad x = 0,\ t = \mathrm{T},\ u = \theta_2,\ z = \theta_2 - b,$$

en divisant membre à membre, il vient

$$\frac{\theta_2 - b}{\theta_1 - b} = e^{-\frac{2}{l}\frac{(\gamma^2 + l\delta^2)}{(l+2)}\mathrm{T}}.$$

En développant l'exponentielle, on peut se borner aux deux premiers termes, et la relation devient

$$\frac{hl(\theta_2 - q) + \theta_2 \mathrm{K} - a(\mathrm{K} - p)}{hl(\theta_1 - q) + \theta_1 \mathrm{K} - a(\mathrm{K} - p)} = 1 + n^2 \mathrm{T}.$$

» Par suite, la relation qui lie T et a est de la forme

$$(\mathrm{K} - p) n^2 \mathrm{T} a - \mathrm{B} n^2 \mathrm{T} + \mathrm{A} - \mathrm{B} = 0.$$

» Dans les limites d'approximation admises, qui sont justifiées par les résultats expérimentaux, la portion étudiée de la courbe théorique se confond donc avec une hyperbole équilatère, dont l'une des asymptotes est l'axe des a et l'autre parallèle à l'axe des T, à une distance de l'origine déterminée par la relation

$$(\mathrm{K} - p) x = hl(\theta_1 - q) + \theta_1 \mathrm{K}.$$

» Cette équation entre x et l détermine une droite que nous appelons *droite des asymptotes*, facile à construire par deux séries d'expériences.

» La relation qui lie les épaisseurs et les temps est

$$\mathrm{D.C}(\theta_2 - \theta_1) x^2 + 2h(\theta_1 - q) xy + 2\mathrm{D.C}(\theta_2 - \theta_1) x + 2[\theta_1 \mathrm{K} - a(\mathrm{K} - p)] y = 0.$$

» La courbe qu'elle représente est une hyperbole ayant une asymptote parallèle à Oy, passant par l'origine et le point ($y = 0$, $x = -2$). Avec deux autres points déterminés expérimentalement, on peut facilement construire cette hyperbole à l'aide de l'hexagone de Pascal. On peut remarquer aussi que l'abscisse à l'origine de l'asymptote parallèle à Oy n'est autre que la valeur de l déduite de la droite des asymptotes en faisant $x = a$.

» L'hyperbole épaisseur-temps, correspondant à la température initiale 100, détermine la résistance thermique définie par M. Thoulet. L'expression de cette quantité étant

$$T_1 = - \frac{D.C\,l(l+2)(\theta_2-\theta_1)}{2[hl(\theta_1-q)+\theta_1 K - a(K-p)]},$$

dans laquelle $l=1$ et $a=100$, cette valeur est proportionnelle au produit D.C, et en raison inverse de la distance du point ($y=1$, $x=100$) à la droite des asymptotes.

» Enfin, l'abscisse à l'origine de la droite des asymptotes étant $\alpha = \frac{\theta_1 K}{K-p}$, cette longueur étant déterminée, on en déduit la valeur du coefficient de conductibilité K. On trouve ainsi, avec les expériences de M. Thoulet :

Fer	10,26
Anhydrite	4,56
Verre	2,66

» On peut donc, avec deux plaques de même substance et d'épaisseurs différentes assez faibles, trouver, par quatre déterminations de temps exécutées rapidement, soit la résistance thermique, soit le coefficient de conductibilité, qui constituent une constante caractéristique importante pour les diverses substances.

» En étendant à d'autres corps le principe de cette méthode, nous nous proposons d'en montrer toute la généralité. »

ÉLECTROCHIMIE. — *Sur l'électrolyse.* Note de M. D. Tommasi.

« Je me propose, dans cette Note, de démontrer la loi suivante. Lorsqu'un courant voltaïque traverse plusieurs électrolytes, pour qu'il y ait décomposition il faut que la quantité de calories produites par la pile soit égale à la somme de calories absorbées par chaque électrolyte, augmentée des calories nécessaires à vaincre la résistance totale des électrolytes. J'entends par calories produites par la pile celles qui sont transmissibles au circuit.

» Bien que cette loi ait été énoncée sous bien des formes et admise en principe par plusieurs physiciens, j'ai pensé néanmoins qu'il était néces-

saire de la soumettre au contrôle de l'expérience; voici les résultats que j'ai obtenus.

» 1° Deux voltamètres à eau [1] ne sont pas électrolysés par deux éléments Daniell [2]. En effet, $98 < 69 + 69$ [3].

» 2° Si l'électrode positive est en cuivre, il y a décomposition. En effet,

$$98 > 69 + 69 - 56,4 \; (^4).$$

» 3° Si les deux électrodes positives sont en cuivre, à plus forte raison il doit y avoir décomposition. En effet, $98 > 69 + 69 - 2 \times 56,4$.

» 4° Si les deux électrodes positives sont l'une en argent et l'autre en cuivre, il y a décomposition. En effet, $98 > 69 + 69 - (56,4 + 20,6)$ [5].

» 5° Si l'on prend les deux électrodes positives en argent, on ne devrait pas observer de décomposition, puisque les calories dégagées par la pile sont presque égales à celles qui sont nécessaires à la décomposition de l'eau; or, en général, il faut toujours quelques calories en plus pour vaincre la résistance de l'électrolyte et pour neutraliser les effets secondaires produits dans l'intérieur de la pile. En effet, 98 est égal, à 1^{cal} près, à $69 + 69 - 41,2$, soit 97.

» Cependant la décomposition de l'eau a lieu. Ce fait est une nouvelle preuve en faveur de l'hypothèse que j'ai émise dans mon dernier Mémoire, à savoir qu'il existe certains métaux qui ont la singulière propriété de déterminer la résistance électrique de certains liquides.

6° $2^{él}$ *Daniell* + $1^{él}$ *zinc-cuivre, soit* $98 + 38 = 136$.

» Avec deux électrodes en platine, il n'y a pas de décomposition. En effet, $136 < 69 + 69$.

» Avec une électrode positive en cuivre, il y a décomposition. En effet,

$$136 > 69 + 69 - 56,4.$$

» 7° $3^{él}$ Daniell, soit 147^{cal}.

» Avec les électrodes en platine, il y a décomposition, pourvu qu'elles soient assez rapprochées les unes des autres, beaucoup plus que dans les expériences précédentes. En effet, $147 > 69 + 69$.

» 8° Avec une électrode positive en argent, il y a décomposition. En effet,

$$147 > 69 + 69 - 20,6.$$

» 9° Avec une électrode positive en cuivre, il y a, à plus forte raison, décomposition. En effet, $147 > 69 + 69 - 56,4$.

---

(1) L'eau contenait $\frac{1}{10}$ de son poids d'acide sulfurique.

(2) $1^{él}$ Daniell vaut environ 49^{cal}.

(3) 69 représente les calories absorbées par une molécule d'eau pour se décomposer en ses éléments.

(4) 56,4 représente les calories de combinaison du sulfate de cuivre.

(5) $20,6 =$ calories de combinaison du sulfate d'argent.

Eau acidulée avec $\frac{1}{10}$ de son poids d'acide chlorhydrique, 2 voltamètres.

» 1° 2^él Daniell ne décomposent pas l'eau si toutes les électrodes sont en platine. En effet, $98 < 66 + 66$ (1).

» 2° Avec une électrode positive en cuivre, il y a décomposition. En effet,

$$98 > 66 + 66 - 66,2 \text{ (2)}.$$

» 3° Avec une électrode positive en étain, il y a décomposition. En effet,

$$98 > 66 + 66 - 81,2 \text{ (3)}.$$

» L'étain étant employé comme électrode négative, l'eau n'est pas décomposée.

3 *voltamètres. Eau acidulée avec $\frac{1}{10}$ de son poids d'acide sulfurique.* 2^él *Daniell.*

» 1° Avec les électrodes en platine, il n'y a pas de décomposition. En effet,

$$98 < 69 + 69 + 69.$$

» 2° Avec une seule électrode positive en cuivre, il n'y a pas non plus de décomposition. En effet, $98 < 69 + 69 + 69 - 56,4$.

» 3° On obtient le même résultat avec deux électrodes positives en cuivre. En effet,

$$98 < 69 + 69 + 69 - 2 \times 56,4.$$

» Mais avec les trois électrodes positives en cuivre, il y a décomposition. En effet,

$$98 > 69 + 69 + 69 - 3 \times 56,4.$$

» Si l'on remplace la première électrode en cuivre, celle qui est reliée avec la pile, par du platine, la décomposition de l'eau cesse de se produire, car, dans ce cas, nous nous trouvons dans les mêmes conditions que dans l'expérience n° 3.

» Je poursuis ces recherches, et j'espère bientôt avoir l'honneur de présenter à l'Académie de nouveaux résultats qui confirmeront davantage la loi sur l'électrolyse que j'ai annoncée. Qu'il me soit permis de dire dès maintenant, pour prendre date, que j'ai recueilli plusieurs faits concernant le rapport qui existe entre les calories produites par une pile et les calories absorbées par plusieurs voltamètres contenant de l'eau, des solutions salines ou des sels fondus (4). »

---

(1) D'après M. Berthelot, l'acide chlorhydrique étendu absorberait environ 66^cal pour se décomposer.

(2) 66,2 = calories de combinaison du chlorure cuivreux.

(3) 81,2 = calories de combinaison du chlorure stanneux.

(4) Ces recherches ont été faites au laboratoire de M. Debray, à l'École Normale.

CHIMIE INDUSTRIELLE. — *Recherches sur la solubilité des aluminates de chaux dans l'eau. Influence de cette solubilité sur le durcissement définitif des matériaux hydrauliques.* Note de M. Ed. Landrin.

« Je poursuis, depuis l'année 1878, une série de recherches sur la théorie de la prise des matériaux hydrauliques, recherches dont j'ai cru devoir consigner les principaux résultats dans trois plis cachetés que l'Académie a bien voulu recevoir dans ses séances du 15 avril 1878, du 27 janvier 1879 et du 20 février 1882. Le temps étant un des éléments les plus importants de ces recherches, je n'avais pas cru devoir en divulguer jusqu'à présent les principaux résultats, mais la Communication faite à l'Académie dans sa séance du 27 mars dernier, par M. H. Le Châtelier, m'oblige à revendiquer aujourd'hui la priorité de quelques faits signalés par ce savant, et notamment la constatation de la solubilité relativement considérable des aluminates de chaux dans l'eau : c'est ce que je prie l'Académie de vouloir bien constater en ouvrant le dernier pli cacheté déposé par moi sous le n° 3556, et en prenant connaissance de son contenu.

Extrait du pli cacheté.

» ..... Je veux établir, en outre, que les aluminates de chaux, dont les travaux si remarquables de M. Fremy ont montré les propriétés hydrauliques, sont cependant des composés extrêmement nuisibles à la conservation à l'eau des mortiers ou ciments dans lesquels ils sont produits par la cuisson.

» *Les aluminates de chaux sont, en effet, solubles dans l'eau,* comme l'aluminate de baryte de H. Sainte-Claire Deville. En préparant les aluminates de chaux par les procédés de M. Fremy, et en les traitant comme suit : 1^{gr} d'aluminate par 500^{cc} d'eau froide ou bouillante, on a pu dissoudre :

	I.	II.	III.
Alumine.........	0,216	0,206	0,440
Chaux..........	0,256	0,248	0,243

» L'expérience I se rapportait au composé $Al^2O^3, 2CaO$; l'expérience III au composé Al^2O^3, CaO bien préparé, et l'expérience II au même composé, mais n'ayant pas subi une fusion complète; ce corps était seulement fritté. En traitant, dans les mêmes conditions, divers composés hydrauliques pro-

venant des fabriques d'Argenteuil, on a trouvé :

	Chaux hydraulique.	Ciment à prise rapide.	Ciment à prise lente, façon Portland.
Alumine.....	0,006	0,026	0,031
Chaux......	0,201	0,156	0,117

» Les aluminates de chaux existent donc dans ces divers composés en proportion plus ou moins grande, et, suivant cette proportion, doivent communiquer à ces composés des résistances à la mer plus ou moins énergiques. Au contraire, la chaux du Theil, qui ne renferme que des traces d'alumine, doit être la chaux qui, par excellence, donne le maximum de résistance lorsqu'elle est immergée, ce qui est en tout point conforme à la pratique. De même, les pouzzolanes, qui ne renferment pas d'aluminates solubles, doivent aussi donner d'excellents résultats.

» En dernier lieu, j'ai cherché si le sesquioxyde de fer ne donnerait pas de composés analogues à l'alumine; dans tous les cas, les mélanges de chaux et d'oxyde de fer chauffés au rouge blanc n'ont pas donné de composés hydrauliques; traités par l'eau, ils ont cédé de la chaux à ce liquide, mais jamais de sesquioxyde de fer. L'oxyde de fer a donc un rôle absolument négatif dans la prise des composés hydrauliques. Enfin, je pense que cette solubilité des aluminates de chaux dans l'eau pourrait être utilisée avantageusement dans la fabrication du sucre et dans le traitement des mélasses. »

CHIMIE PHYSIOLOGIQUE. — *Sur le rapport entre l'isomorphisme, les poids atomiques et la toxicité comparée des sels métalliques*. Note de M. **J. Blake**, présentée par M. Wurtz.

« Les *Comptes rendus* ont publié l'an dernier une Communication de M. Ch. Richet sur *la toxicité comparée des métaux*. Les expériences qui y sont rapportées ont été faites en dissolvant différents sels métalliques dans l'eau, et introduisant des poissons dans ces diverses solutions. La conclusion que M. Richet a tirée de ces expériences, c'est qu'il n'y a aucun rapport entre la toxicité et la fonction chimique des métaux.

» Depuis plusieurs années, je me suis occupé de rechercher les effets qui sont produits par l'introduction de substances inorganiques dans le *sang* des animaux vivants. Dans le cours de ces expériences, j'ai essayé l'action de sels de trente métaux; comme les résultats auxquels mes expé-

riences m'ont conduit sont tout à fait opposés à ceux que M. Richet a tirés des siennes, je vais rappeler les conclusions auxquelles je suis arrivé.

» Le premier résultat que j'ai obtenu sur le rapport entre les propriétés chimiques et l'action physiologique de ces sels métalliques a été publié dans une Communication adressée à l'Académie en 1839, où j'ai dit :

« Le premier fait qui nous frappe, c'est le rapport qui existe entre la composition chimique et l'action physiologique des sels employés. Ce rapport n'est pas, il est vrai, tel que l'état actuel de nos connaissances des affinités chimiques nous l'eût fait prévoir; car il est évident que les décompositions effectuées dans le sang par ces sels, décompositions sur lesquelles roule toute leur action physiologique, il est évident, dis-je, que ces décompositions dépendent de la base du sel, et ne sont que peu modifiées par la combinaison de cette base avec les acides même les plus puissants. »

» En 1840, dans un Mémoire présenté à la Société royale de Londres, j'ai montré que les réactions physiologiques qui suivent l'introduction de ces sels métalliques dans le sang sont déterminées par leurs relations d'isomorphisme, les substances dans la même famille isomorphe donnant lieu à des réactions physiologiques semblables.

» En 1870, dans un Mémoire que j'ai lu à l'Académie des Sciences de Californie, j'ai montré que l'intensité de l'action de ces sels métalliques dans la même famille isomorphe était déterminée par leur poids atomique : plus le poids atomique est élevé, moins il faut de sel pour produire la même réaction physiologique. Si les conclusions que j'ai tirées de mes expériences sont fondées (et elles ont compris l'investigation de combinaisons de quarante éléments, parmi lesquels des sels de trente métaux), il est clair que la fonction chimique exerce un rôle des plus importants dans les réactions physiologiques [1].

» Si les expériences de M. Richet l'ont conduit à une autre conclusion, on peut l'attribuer à cette circonstance que les substances toxiques, quand elles sont mises en contact avec les membranes muqueuses ou gastro-intestinales ou pulmonaires, produisent d'autres effets que quand on les introduit

[1] En 1869, M. Rabuteau a communiqué à l'Académie un Mémoire dans lequel il a tâché de démontrer qu'il existe une liaison entre la toxicité des métaux et leur poids atomique. Ses expériences n'ont pas été assez nombreuses pour démontrer le vrai rapport qui existe entre ces deux phénomènes, mais c'est son Mémoire qui m'a conduit à envisager la question du rapport entre l'action physiologique et les poids atomiques, et qui m'a ainsi mené à la découverte de la loi que je viens d'annoncer. M. Dujardin a aussi démontré que parmi les alcools de la même série l'action toxique augmente toujours avec le poids atomique.

directement dans le sang. Pour ne citer que quelques cas où cette différence est bien marquée, je rappellerai que le curare, le venin du cobra, la salive du chien enragé peuvent être avalés pour ainsi dire impunément, tandis que, introduits directement dans le sang, ils sont des agents toxiques des plus prononcés. Claude Bernard a même démontré, dans ses *Leçons sur les substances toxiques,* que le tannin dans l'eau où se trouvent des poissons les empoisonne aussi vite que le curare, et cependant il a été bien loin de tirer la conclusion que le tannin était une substance aussi toxique que le curare. Il y a bien d'autres considérations qui empêchent de tirer des expériences de M. Richet aucune conclusion sur la toxicité des sels employés. Ainsi les différents sels ont des coefficients de diffusion très divers, et, quand ils sont en présence d'une membrane comme celle qui recouvre les branchies, il entre dans le sang des quantités très différentes de deux sels, bien qu'ils soient en dissolution dans l'eau dans le même rapport. La rapidité avec laquelle les divers sels entrés dans le sang sont éliminés par les reins n'est pas du tout la même, et l'action locale de ces sels sur le tissu même des branchies peut, comme dans l'expérience de Claude Bernard avec le tannin, fausser toute conclusion sur leur toxicité comparée qu'on pourrait tirer des expériences de M. Richet.

» Ces considérations, je l'espère, suffiront pour démontrer que les expériences rapportées par M. Richet ne prouvent rien contre le lien que j'ai découvert entre la fonction chimique et l'action physiologique des sels métalliques ; en effet, cette liaison est tellement intime, que je crois que la matière vivante pourra nous doter d'un élément important pour les questions de Chimie moléculaire [1]. »

M. **Dumas** fait remarquer que M. J. Blake ne semble pas rendre à M. Rabuteau toute la justice qui lui est due. Les considérations que ce dernier a publiées depuis longtemps n'ont laissé aucune incertitude sur l'accroissement du caractère toxique avec l'élévation du poids atomique dans les corps simples comparables.

---

(1) Quant à l'exception que présentent les sels de potasse dans leur action physiologique et sous le rapport de l'isormorphisme et du poids atomique, c'est un fait que j'ai publié il y a plusieurs années : c'est le seul cas, parmi les trente métaux avec lesquels j'ai expérimenté, où se trouve une telle anomalie. Cependant la toxicité comparée de ces sels est beaucoup moindre que celle qu'a indiquée M. Richet, car le coefficient de diffusion des sels potassiques est beaucoup plus grand que celui des autres sels dont il s'est servi : ainsi ils entrent dans le sang à travers la membrane branchiale beaucoup plus facilement que les autres.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur quelques propriétés physiques du camphre bichloré.* Note de MM. **P. Cazeneuve** et **Didelot**, présentée par M. Wurtz.

« Le camphre bichloré $C^{10}H^{14}Cl^2O$ découvert par l'un de nous [1] est insoluble dans l'eau, à laquelle il donne toutefois son odeur. Projeté à sa surface, il prend des mouvements gyratoires très intenses, comme le camphre. Il est peu soluble dans l'alcool très froid. Son coefficient de solubilité dans ce liquide augmente rapidement avec la température. A l'ébullition, le camphre bichloré paraît se dissoudre en toutes proportions. Il est très soluble dans le chloroforme, dans le sulfure de carbone. Il est extrêmement soluble dans l'éther; il se liquéfie même au contact de la vapeur d'éther. Cette solution éthérée, abandonnée dans un ballon ouvert, cristallise difficilement. L'éther paraît retenu énergiquement, comme s'il s'effectuait une sorte de combinaison moléculaire.

» Le camphre bichloré est insoluble dans l'acide acétique; une trace se dissout à l'ébullition. On se rappelle que le camphre s'y dissout et forme même une combinaison moléculaire.

» Agité avec une solution aqueuse d'aldéhyde, le camphre bichloré se liquéfie en se combinant à l'aldéhyde, comme le fait le camphre. Cette combinaison moléculaire est plus dense que l'eau. La combinaison de camphre et d'aldéhyde est au contraire plus légère que ce liquide.

» Le camphre bichloré pulvérisé avec de l'hydrate de chloral ne se liquéfie pas comme le fait le camphre.

» Le camphre bichloré a pour densité 4,2. La densité du camphre, plus faible que celle de l'eau, est 0,986-0,996.

» Le camphre bichloré fond exactement à 96°; il se solidifie à 95°, reste mou et pâteux même au-dessous de 70°. Le point de fusion publié dans la Note du 13 mars, 89-93, est inexact. Le produit examiné renfermait une trace d'impureté.

» Remarque digne d'intérêt, le camphre monochloré de Wheeler fond à 95°. Il appartient probablement à une série isomère. Un degré de différence dans le point de fusion n'est pas en rapport avec un degré de chloruration du simple au double.

» Le pouvoir rotatoire du camphre bichloré est

$$[\alpha]_j = +57°{,}3.$$

---

[1] *Voir* Cazeneuve, *Comptes rendus*, séance du 13 mars 1882.

Ce pouvoir rotatoire est constant, soit dans l'alcool, soit dans le chloroforme. Le camphre, au contraire, d'après la remarque intéressante de Biot, présente un pouvoir rotatoire variable suivant la proportion d'alcool qui le tient en dissolution : de là la conclusion à une combinaison moléculaire.

» Le camphre bichloré ne donne des cristaux nettement définis qu'au sein de l'alcool. Ces cristaux sont biréfringents. Ils se présentent sous forme de prismes droits à base rhombe de 100°40′, terminés par un dôme de 122°55′, parallèle à la petite diagonale de base. Les uns sont très allongés suivant les pans du prisme et ne portent aucune face de modification autre que celle du dôme; les autres, de forme courte, prennent l'aspect octaédrique par suite de la réduction des faces du prisme et de l'accroissement de celles des dômes; enfin ces derniers présentent fréquemment une face parallèle au plan des petites diagonales de base. Les faces de base ne sont visibles que dans un très petit nombre de ces cristaux; la substance présente deux clivages difficiles parallèlement aux pans du prisme.

» Ces deux aspects différents, forme allongée et forme courte, se produisent suivant la concentration de la solution alcoolique et la rapidité de la cristallisation. L'aspect octaédrique apparaît dans les cristallisations très lentes. On obtient un produit dur. Une cristallisation rapide donne de longues aiguilles accolées et friables.

» Ces deux aspects sont tellement différents, qu'on est tenté de croire au dimorphisme. Les mensurations infirment cette manière de voir. »

CHIMIE PHYSIOLOGIQUE. — *Peptones et alcaloïdes. Réponse à M.* J. Béchamp. Note de M. C. **Tanret**, présentée par M. A.-Milne Edwards.

« Dans les conclusions de sa Note insérée au dernier numéro des *Comptes rendus,* M. J. Béchamp reproduit, à certains égards, ce que j'avais eu l'honneur d'exposer moi-même en mai 1881. En effet, dans ma Note intitulée *Peptones et alcaloïdes* ([1]), j'ai établi :

» 1° Que les réactifs qui précipitent les alcaloïdes précipitent les peptones...;

» 2° Qu'en traitant les peptones par l'éther et le carbonate de potasse

([1]) *Comptes rendus,* t. XCII, p. 1163.

on en retire des alcaloïdes qui réduisent le cyanoferride de potassium

» 3° Que cette réduction n'est pas caractéristique des ptomaïnes, puisque des poisons végétaux très violents la produisent, notamment l'ésérine et l'hyoscyamine, dont l'action sur la pupille est si différente.

» Il est vrai que nous différons sur quelques points de détail; c'est ainsi que M. J. Béchamp obtient avec le bicarbonate de potasse ce que seul m'a donné le carbonate neutre. Or, sans parler de l'entraînement possible, par l'éther, de traces de peptone suffisantes pour produire les réactions observées, on peut s'expliquer la présence du carbonate de potasse et par suite son action, dans les expériences de l'auteur, par la dissociation partielle du bicarbonate employé. »

PHYSIOLOGIE PATHOLOGIQUE. — *Sur la rapidité de la propagation de la bactéridie charbonneuse inoculée.* Note de M. A. **Rodet**, présentée par M. Bouley.

« Le 12 décembre 1881, M. Davaine exposait devant l'Académie le résultat de ses expériences sur la rapidité de l'absorption des virus à la surface des plaies. Partant de cette idée qu'il n'était peut-être pas rigoureux de transporter à la pratique les conclusions décourageantes des expériences de MM. Renault et Colin, à cause de la nature si différente des plaies accidentelles et des plaies d'inoculation à la lancette, il avait pensé se rapprocher davantage des conditions ordinaires en expérimentant sur des plaies de nature variée, par exemple sur des plaies produites par l'excision des téguments. Il obtint des résultats absolument différents de ceux de MM. Renault et Colin. Cautérisant les plaies trois quarts d'heure, une heure et même trois heures après y avoir déposé du sang charbonneux très actif, il vit survivre sept lapins sur dix.

» Je suis heureux de voir ainsi confirmées par M. Davaine les expériences que j'ai faites moi-même sur le même sujet l'hiver dernier, au laboratoire de Médecine expérimentale de la Faculté de Lyon, sous la direction de M. Chauveau, et qui sont consignées dans ma Thèse inaugurale ([1]). J'ai en effet obtenu un résultat analogue à celui de M. Davaine, à savoir une grande irrégularité dans les effets de la destruction de la partie inoculée.

» J'ai aussi opéré sur des lapins. J'ai pratiqué les inoculations à la lancette, au bout de l'oreille, et j'ai sectionné cet organe après un temps variable.

» Sur huit lapins, dont les oreilles avaient été coupées à peu près à la même hauteur, quatre moururent du charbon, chez lesquels la section avait été faite deux heures, cinq

heures, six heures et neuf heures après l'inoculation ; quatre survécurent, chez lesquels elle avait été faite après une heure, trois heures, sept heures et même dix heures.

» Sur neuf lapins opérés de même, six moururent, qui avaient eu l'oreille coupée après une, deux, quatre, sept, huit et neuf heures; trois survécurent, chez lesquels la section avait été pratiquée trois, cinq et six heures après l'inoculation.

» Dans deux autres expériences, les sections furent faites trois heures après l'inoculation sur une première série de douze lapins, et après trois quarts d'heure sur une seconde : les vingt-quatre animaux succombèrent au charbon.

» En résumé, sur 41 lapins, 31 moururent, 10 survécurent, et ces derniers ne furent pas ceux chez lesquels la section avait été faite le plus tôt.

» Le rapport entre les survivants et les morts n'a pas été, dans mes expériences, le même que pour les animaux de M. Davaine ; mais, à ce rapport près, le résultat est absolument analogue : c'est un défaut absolu de règle pour la rapidité d'absorption.

» En présence de ces faits, si différents de ceux de MM. Renault et Colin, j'en ai cherché l'explication et j'ai cru devoir invoquer comme causes de la variabilité des résultats : l'activité particulière et variable des bactéridies, dont la multiplication joue sans doute un grand rôle dans le phénomène de la propagation ; la nature intime du terrain organique, analogue, je le veux bien, chez tous les animaux de même espèce, mais non sans doute absolument identique et pouvant présenter des différences d'ordre physique, chimique ou physiologique ; enfin la localisation de la bactéridie en tel ou tel point du tissu sous-dermique, localisation plus ou moins favorable au séjour ou à la propagation.

» Je n'ai pas cru devoir attribuer d'importance au rôle des vaisseaux sanguins ; et sur ce point particulier j'entreprends, avec M. Chauveau, de nouvelles expériences qui pourront jeter un certain jour sur la question.

» Pour M. Davaine, c'est surtout dans la nature des plaies qu'il faut chercher la raison des différences observées; or, j'ai obtenu les mêmes résultats que lui, quoique j'aie opéré, comme MM. Renault et Colin, par des inoculations à la lancette. La nature de la plaie ne paraît donc pas avoir une influence de premier ordre, et, si j'ai eu l'honneur d'adresser cette Note à l'Académie, c'est précisément parce que mes faits me paraissent commander une certaine réserve au sujet de l'explication de M. Davaine. »

---

(1) *Contribution à l'étude expérimentale du charbon bactéridien.* Thèse de Lyon, 18 juin 1881.

ZOOLOGIE. — *Le Puceron des Lataniers* (Cerataphis lataniæ) (Coccus lataniæ *Boisduval*, Boisduvalia lataniæ *Signoret*). Note de M. J. LICHTENSTEIN.

« Les Lataniers de l'île Bourbon sont attaqués par un insecte homoptère qui paraît être tellement abondant, qu'on le retrouve dans toutes les serres chaudes de l'Europe où l'on cultive des Lataniers venant de ce pays.

» M. Boisduval, dans son *Entomologie agricole*, en 1867, le nomme *Coccus lataniæ*, quoique cet insecte ne présente aucun des caractères des Coccidiens, car, sauf sa forme arrondie et la fimbriature nacrée qui rappelle l'apparence de quelques cochenilles, ni le rostre, ni les antennes, ni les tarses, ne présentaient les caractères du groupe auquel Boisduval le rattachait à la suite de sa monographie des *Aleurodes*. En 1867, M. Signoret mentionne le même insecte, sous le nom de *Boisduvalia lataniæ*, mais sans donner aucune diagnose, avouant qu'il ne sait où le caser et faisant appel aux entomologistes de l'île Bourbon pour trouver la forme mâle, qu'il suppose devoir être ailée comme les Coccides en général. Depuis plusieurs années j'observe ce puceron, qui est très abondant sous la forme décrite par Boisduval et Signoret, et, en mai 1881, j'entrevis une forme ailée, mais en un seul exemplaire mutilé, ce qui me permit pourtant de constater que j'avais affaire à un Aphidien du groupe des *Schizoneura*.

» Il y a quelque temps, M. Signoret eut l'obligeance de me communiquer un second exemplaire aussi assez mal conservé, dont l'examen confirma ma première impression sur la vraie nature de cet animal, et enfin, hier (25 mars), j'ai trouvé dans les serres du Jardin des plantes de Montpellier l'insecte ailé vivant.

» A première vue, on dirait un Phylloxera ailé : il en a la taille, la couleur et *porte ses ailes à plat*, caractère très rare chez les Aphidiens, car je ne connais que quatre genres dans ce cas-là (*Aploneura, Vacuna, Phylloxera*, et le nouveau venu.)

» Mais, à l'examen microscopique, les antennes de cinq articles, la cubitale fourchue au lieu d'être simple, la présence d'embryons formés dans l'abdomen, sont autant de caractères qui l'éloignent du Phylloxera et le rattachent au genre *Vacuna*, dans lequel il pourrait même se ranger à la rigueur, mais dont il se distingue, *sous toutes les formes que je connais*, par la présence de deux petites cornes coniques et aiguës, sous le front, entre les antennes.

» Ce caractère m'a engagé à créer pour lui le nom générique de *Cérataphis* (κέρας, corne, et ἄφις).

» La biologie de cet insecte, que je ne connais pas encore en entier, se rapprochera beaucoup de celle du *Phylloxera vastatrix*. Je trouve, comme dans le puceron de la vigne, la grosse forme aptère, pondant sans le concours du sexe mâle (*Pseudogyne fondatrice*). Cette forme est suivie d'une seconde qui lui ressemble beaucoup, mais qui a un article de plus aux antennes (*Pseudogyne bourgeonnante*). Celle-ci paraît avoir la faculté de se reproduire indéfiniment, par bourgeonnement, comme le Phylloxera des racines, et enfin de loin en loin (deux fois en quatre ans, avec des visites presque hebdomadaires aux plantes attaquées) paraît une forme ailée. Si ma théorie de l'évolution phylloxérienne est bien fondée, cet ailé sera la *Pseudogyne pupifère* et devra fournir les petits sexués aptères, mâle et femelle. Peut-être un heureux hasard me permettra-t-il un jour de conduire jusqu'au bout cet élevage, d'autant plus difficile à réussir qu'il exige 30° de chaleur constante. »

PHYSIQUE DU GLOBE. — *Sur la densité et la chloruration de l'eau de mer puisée à bord du* Travailleur *en* 1881. Note de M. **Bouquet de la Grye**, présentée par M. Alph.-Milne Edwards.

« Les densités des échantillons d'eau de mer ont été obtenues par trois procédés différents :

» 1° Directement par la méthode des pesées ; on a introduit pour cela une certaine quantité d'eau de mer dans une ampoulette d'une capacité connue et, du poids de cette eau, on a conclu sa densité en tenant compte de sa dilatation, de celle de l'ampoulette et du poids de l'air déplacé. Ces densités sont rapportées à la température de 15°. Elles sont inscrites dans la colonne n° 4 du Tableau ci-joint.

» 2° La densité a été conclue des chiffres inscrits sur les flacons contenant les échantillons. Ces chiffres représentent les densités données par un aréomètre non étalonné, ainsi que la température de l'eau de mer au moment de l'expérience. Au moyen de données obtenues en plaçant le même aréomètre à deux températures différentes, j'ai conclu sa dilatation propre et, par suite, j'ai pu réduire toutes les densités à la température de 15°.

» Les résultats sont inscrits dans la colonne 7. Dans la colonne 8 sont

portées les différences entre les chiffres de la colonne 7 et les densités vraies de la colonne 4. Comme on s'était servi de deux poids additionnels différents pour faire plonger l'aréomètre, la correction instrumentale a passé de 0,0063 à 0,0124. En appliquant ces corrections aux chiffres de la colonne 7, on arrive à des écarts qui atteignent 20 unités du quatrième ordre.

» Ce chiffre n'est point exagéré si l'on songe combien est difficile l'emploi de l'aréomètre à bord d'un bâtiment lorsqu'il y a du roulis.

» A côté de ce chiffre, qui exige un étalonnage préalable à terre et une correction importante due à la température, vient se placer celui qui a pour base la quantité de chlore contenue dans un échantillon d'eau de mer. J'ai indiqué, en 1875, que l'on pouvait obtenir ainsi, avec une grande approximation, la densité de l'eau salée; les chiffres portés dans la colonne 9 représentent le poids de chlore par litre de l'échantillon. En multipliant ce poids par 16,7, on a en décimales du quatrième ordre la correction à apporter au chiffre constant 0,9944 pour avoir la densité correspondante à 15° (à 20° on multiplierait par 16,0). La colonne 10 donne la densité ainsi calculée, qui ne diffère que peu de sa densité vraie, ainsi que le montre la colonne 11.

1. Dates.	2. Position.		3. Profondeur m	4. Densité à 15° par des pesées.	5. Chiffres inscrits sur les flacons T° o	aréomètre.	6. Correction relative à la température.	7. Résultats.	8. Différence.	9. Poids du chlore par litre.	10. Densité calculée.	11. Erreur.
5 juillet.	42°52′ N.	2°58′30″ E.	Surface	1,02875	24	1,0201	+0,0025	1,0226	+ 61	20,93	1,0293	0,0005
			600	1,02926	25,2	1,0205	+0,0029	1,0234	+ 58	21,27	1,0299	+0,0006
			1000	1,02953	24,9	1,0198	+0,0028	1,0226	+ 69	21,40	1,0301	+0,0005
7 juillet.	En face de Nice......		300	1,02912	22,0	1,0150	+0,0020	1,0170	+121	21,00	1,0295	+0,0004
			600	1,02955	21,5	1,0150	+0,0018	1,0168	+127	24,04	1,0296	0,0000
12 juillet.	43°15′ N.	5°1′ E......	600	1,02964	20,3	1,0155	+0,0015	1,0170	+126	21,09	1,0296	0,0000
			1200	1,02948	18,4	1,0165	+0,0010	1,0175	+120	20,99	1,0294	−0,0001
			1800	1,02972	21,9	1,0150	+0,0020	1,0170	+127	21,33	1,0300	+0,0003
			2400*	1,02896	20,9	1,0155	+0,0017	1,0172	+117	20,85	1,0292	+0,0003
26 juillet.	35°30′ N.	5°12′ O....	200	1,02855	23,1	1,0155	+0,0023	1,0178	+107	20,65	1,0288	+0,0003
			400	1,02894	21,7	1,0160	+0,0019	1,0179	+110	20,85	1,0292	+0,0003
7 août...	39°33′	12°4′30″ O.	1500	1,02795	20,3	1,0160	+0,0015	1,0175	+104	20,19	1,0281	+0,0802
17 août...	44°48′30″	7°1′30″ O..	Surface	1,02718		»	»	»	»	19,85	1,0276	+0,0004
			500	1,02743	19,0	1,0140	+0,0011	1,0151	+123	19,83	1,0276	+0,0002
			1000	1,02752	18,2	1,0150	+0,0009	1,0159	+116	19,92	1,0277	+0,0002
			1500	1,02752	19,0	1,0140	+0,0011	1,0151	+124	19,90	1,0277	+8,0002
			2000	1,02756	18,9	1,0139	+0,0011	1,0150	+125	19,87	1,0276	0,0000

* Il doit y avoir ici une interversion de flacons.

» Passons maintenant à l'examen des chiffres obtenus. On voit de suite que la densité et la salure vont en augmentant lorsqu'on passe de l'Océan à la Méditerranée.

» Ainsi, dans le golfe de Gascogne, on a trouvé 1,02718; vis-à-vis des îles Berlingas, sur la côte du Portugal, 1,02795; puis au cap Tres Forcas, en dedans du détroit de Gibraltar, 1,02855, et enfin, au large de Nice, le maximum 1,02964.

» Les eaux de la surface sont moins salées et moins denses que celles inférieures, et, en général, l'accroissement varie dans le même sens que la profondeur.

» Ces faits s'accordent avec ce que nous savons de la différence de hauteur de la Méditerranée et de l'Océan et aussi avec les variations du niveau moyen de cette première mer constatées à la suite du nivellement géométrique de M. Bourdaloue.

» Comme les chiffres donnés par cet habile ingénieur ont été récemment contestés (1), je crois utile de montrer ici l'appui que viennent lui prêter les sondes du *Travailleur*.

» L'équilibre des mers envisagées sur de grandes étendues, étant un équilibre de poids, tel que celui qui se présente dans l'expérience des vases communiquants, le liquide le moins dense se maintient au niveau le plus élevé. Il se produit par suite un courant de surface allant du liquide le moins salé à celui qui l'est le plus. Si la cause qui rend permanente la différence de salure est constante, le courant lui-même est constant.

» Or l'évaporation exceptionnelle de la Méditerranée augmente la salure de ses eaux, d'où l'appel qui se produit au détroit de Gibraltar. Il n'y a donc rien que de naturel à ce que la hauteur moyenne de la mer qui, à Marseille, est plus basse de 1^{m} que celle de l'Océan, aille en augmentant au fur et à mesure que l'on s'avance dans l'Ouest et en diminuant lorsqu'on s'approche de la côte d'Italie, où l'eau est plus salée.

» J'ai montré, en 1875, que de deux séries d'échantillons d'eau de mer puisés dans l'Océan et dans la Méditerranée on pouvait conclure la différence de hauteur de ces deux mers à quelques centimètres près. Nous pouvons essayer encore ici de vérifier, en partant du même principe, les chiffres donnés dans les deux mers par M. Bourdaloue.

» De la sonde du 17 août, dans le golfe de Gascogne, on déduit une densité moyenne de 1,02708 pour 400^{m} de profondeur.

» De celle du 5 juillet, vis-à-vis de l'embouchure du Rhône, on déduit 1,028896 pour la même profondeur.

» Or ces deux chiffres conduisent à une différence de hauteur de $0^{m},72$,

(1) Mémoire de M. Vigau, inséré dans les *Annales des Ponts et Chaussées* (mai 1881).

tandis que M. Bourdaloue indique $0^{m},85$, entre Bayonne et Bouc, et la mer moyenne à Bayonne est certainement supérieure de quelques centimètres à celle en dehors des estacades de l'embouchure.

» La vérification est donc ici parfaite.

» Prenons maintenant la sonde précitée du 5 juillet et celle du 7 vis-à-vis de Nice. On a, dans ce dernier cas, une densité moyenne de 1,028896. En multipliant encore ce chiffre par 400 comme interpolation entre deux résultats reconnus exacts, et faisant la différence avec celui du 5 juillet, on a $0^{m},08$ comme résultat, tandis que M. Bourdaloue conduit à $0^{m},11$. La vérification est encore très exacte. Ces exemples nous montrent quel intérêt nouveau s'attache à la recherche des densités de la mer et le champ précieux d'investigation ouvert sur la constitution et les mouvements généraux des Océans par des sondes telles que celles faites en 1881 à bord du *Travailleur*. »

GÉOLOGIE. — *Observations à propos d'une Communication récente de M.* Dieulafait, *sur les roches ophitiques des Pyrénées;* par M. **Virlet d'Aoust.**

« A propos de l'important *Mémoire sur les roches ophitiques des Pyrénées* qui a été adressé à l'Académie par M. Dieulafait, le 6 mars dernier, je demande la permission de rappeler les conclusions que j'avais déjà formulées moi-même, il y a bientôt vingt ans.

» Dans une lettre adressée à Élie de Beaumont, le 10 mars 1863 [1], j'ai démontré que la fameuse ophite de Bayen ou de Palassou, la seule véritable ophite, avec laquelle les géologues ont souvent confondu les diorites siluriennes et dévoniennes, était une roche d'origine sédimentaire, une roche principalement composée d'éléments feldspathiques, une espèce de kaolin remanié, coloré par des substances vertes, puis modifié par des actions métamorphiques normales, ayant agi, selon les points, avec plus ou moins d'intensité ou pendant un temps plus ou moins prolongé : de là, les divers états sous lesquels elle se présente, euritique, porphyrique et enfin lherzolithique.

» J'ai démontré en même temps que cette roche occupe, dans le terrain

---

(1) Cette lettre a été seulement indiquée dans les *Comptes rendus de l'Académie*, mais elle a été reproduite par l'*Institut* et *les Mondes*, et aussi, plus tard, dans le tome XXII^e^, 2^e^ série, du *Bulletin de la Société géologique de France*.

de trias, exactement la position indiquée par M. Dieulafait et y forme une zone continue entre les grès rouges et les marnes irisées gypseuses et salifères, et qu'elle y est par conséquent congénère du muschelkalk. L'ophite succède, en effet, partout aux grès rouges et se lie intimement avec eux; ainsi, à Lez, près Saint-Béat, on peut facilement voir les grès et schistes rouges passer, par des nuances insensibles, à des schistes verts devenant de plus en plus feldspathiques et passant enfin à l'ophite elle-même. On peut suivre, à l'est de cette localité, les affleurements de cette roche qui s'annoncent par des pointements ou des dépressions du sol, jusqu'au col de Mendé et de là jusque vers le milieu de la montagne du Gar, dont le soulèvement l'a relevée avec les grès rouges et les calcaires de la montagne du Mont qui la recouvrent, et tout en conservant leur parallélisme. On peut également vérifier, de l'autre côté de la Garonne, dans la Barousse, plusieurs de ces passages évidents des grès rouges à l'ophite et notamment à l'ouest de Mauléon, au village d'Ourde, où nous avons également constaté, dans les schistes rouges, la présence de débris végétaux, signalés par de nombreuses queues cannelées de feuilles, dont malheureusement nous n'avons pas été assez heureux, sur les fragments détachés que nous avons pu observer, pour pouvoir constater aussi leur empreinte. Enfin, on peut encore facilement vérifier la véritable position géologique de l'ophite, à Lescure, entre Foix et Saint-Girons, où on la voit s'appuyer au sud, en gisement concordant sur les grès rouges qui constituent la montagne de Garié, tandis qu'au nord elle est recouverte, en stratification également concordante, par les marnes irisées gypseuses.

» Lorsque j'ai fait connaître ces faits, si contraires à l'opinion généralement reçue, d'une origine ignée de l'ophite, la plupart des géologues ont conservé leur opinion sur la prétendue origine plutonique de la roche. J'attendais patiemment que la lumière se fît. Aussi est-ce avec une vraie satisfaction que je vois aujourd'hui M. Dieulafait venir confirmer, en partie du moins, l'exactitude des faits que j'avais observés. »

M. C. **Decharme** adresse une cinquième Note concernant ses expériences hydrodynamiques.

Dans cette Note, l'auteur indique, en particulier, les phénomènes par lesquels se manifeste la répulsion entre les parties consécutives d'un même courant liquide : vibrations planes, avec ou sans rotation.

La séance est levée à 4 heures et demie. D.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Ouvrages reçus dans la séance du 3 avril 1882.

Description des machines et procédés pour lesquels des brevets d'invention ont été pris sous le régime de la loi du 5 juillet 1844, publiée par les ordres de M. le Ministre de l'Agriculture et du Commerce; T. XXII, 1re et 2e Parties. Paris, Impr. nationale, 1882; 2 vol. in-4°.

Du poirier et du cidre; par J. Decaisne, 1881; opuscule in-8°. (Extrait de la *Flore des serres et des jardins de l'Europe.*)

Système silurien du centre de la Bohême; par J. Barrande; Vol. VI. Quatre chapitres de texte et planches 1 à 254. Prague, et Paris, chez l'auteur et éditeur, 1881; 4 vol. in-4° reliés.

Rapport sur une mission en Angleterre du 16 juin au 16 août 1879; par M. Bertin. Paris, lithogr. Dufrénoy, 1880; 1 vol. in-4°, avec atlas grand aigle. (Présenté par M. Dupuy de Lôme.)

Contribution à l'étude expérimentale du charbon bactéridien; par A. Rodet. Paris, G. Masson, 1881; br. in-8°. (Présenté par M. Bouley.)

Précis de géographie médicale. Conférence faite par le Dr A. Rodet. Lyon, Mégret, 1881; br. in-8°. (Présenté par M. Bouley.)

ERRATA.

(Séance du 13 mars 1882.)

Page 704, ligne 4 en remontant, *au lieu de* Leclère, *lisez* Leclerc.

(Séance du 27 mars 1882.)

Page 853, dernière ligne, *au lieu de* p. 643, *lisez* p. 722.

(Séance du 3 avril 1882.)

Page 956, ligne 22, *au lieu de* l'unité, *lisez* un.

Page 991, ligne 12 en remontant, *au lieu de* p_1, *lisez* p.